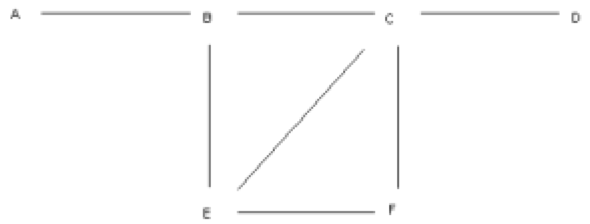
TD 1 : Dénombrements

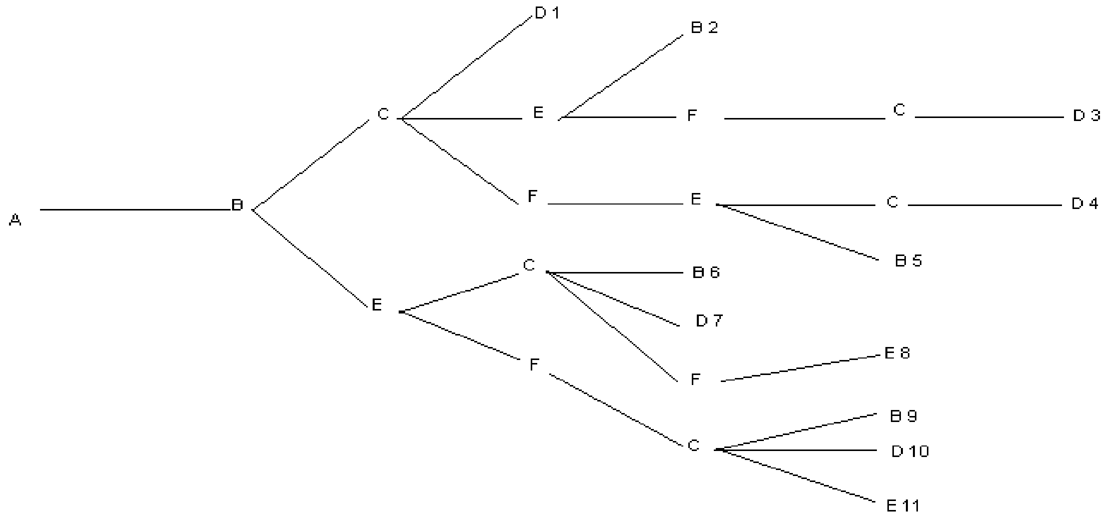
I. Effectuer les calculs suivants :

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2} = 56$$
$$C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2} = 70$$
$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = 9\times8\times7 = 504$$

II. Sur le schéma ci-dessous, les lettres A, B ,..., F représentent des îles et les traits représentent des ponts reliant ces îles. Une personne part de A et va d'île en île. Elle s'arrête quand elle ne peut plus continuer sans repasser sur un pont déjà emprunté.



Compléter l'arbre suivant donnant la liste des chemins que la personne peut utiliser avant de devoir s'arrêter.
Il y a 11 solutions :



III. Pour constituer l'emploi du temps d'une matinée de classe, on doit répartir les 4 matières suivantes : français, histoire, physique et latin. Chaque matière occupe une heure de cours.

a) Combien d'emplois du temps différents peut-on constituer?

4 ! = 24 emplois du temps possibles

b) Même question si on impose au latin d'être juste après le français.

3 x 2 != 6 solutions (FL?? ou ?FL? ou ??FL)

c) Idem si le latin est après le français.

3 ! + 2 x 2 ! + 2 ! = 12 solutions (F??? ou ?F?? ou ??F?)

IV. Combien doit-on faire d'essais au maximum pour être certain d'obtenir le bon numéro si on veut téléphoner à une personne dont le numéro comporte 10 chiffres dont on ne connaît que les 6 premiers?
10^4 = 10 000 essais

V. Même question si on sait que les chiffres manquants sont : 2;4;5;8.
4 ! = 24 essais

VI. Même question si on sait que les chiffres manquants sont : 2;2;5;7.
4 ! / 2 ! = 12 essais (${2_1 2_2}57$ et ${2_2 2_1}57$ sont identiques)

VII. Combien d'anagrammes distinctes peut-on faire avec les lettres de :

a) EVENEMENT

$\dfrac{9\,!}{2\,!2\,!2\,!} = 45\,360$ (en minuscule)

$\dfrac{9\,!}{4\,!2\,!} = 7\,560$ (avec majuscule)

b) STATISTIQUES

$\dfrac{12\,!}{3\,!\,3\,!\,2\,!} = 6\,652\,800$

VIII. De combien de manières peut-on former un jury de 3 hommes et 2 femmes en choisissant les membres parmi 7 hommes et 5 femmes?
$C^3_7\, C^2_5$ = 350 jurys différents possibles

Même question en imposant que le jury possède un président.
$C^1_7\, C^2_6\, C^2_5$ = 1 050 jurys

Même question si le président peut aussi être une femme.
$C^1_7\, C^2_6\, C^2_5 + C^1_5\, C^3_7\, C^1_4$ = 1 750 jurys

IX. Avec un jeu de 32 cartes, donner le nombre de "mains" de 8 cartes :

a) contenant deux cœurs et six piques.
$C^2_8\, C^6_8$ = 784 mains

b) contenant un roi.
$C^1_4\, C^7_{28}$ = 4 736 160 mains

c) contenant deux rois et une dame
$C^2_4\, C^1_4\, C^5_{24}$ = 1 020 096 mains

d) contenant le roi de cœur
$C^1_1\, C^7_{31}$ = 2 629 575 mains

e) contenant au moins un roi.
$C^8_{32} - C^8_{28}$ =7 410 195 mains (tous les cas sauf aucun roi)

f) contenant un roi et un cœur
$C^1_1\, C^7_{21} + C^1_3\, C^1_7\, C^6_{21}$ = 1 255 824 mains (le roi de cœur ou un roi pas de cœur et un cœur)