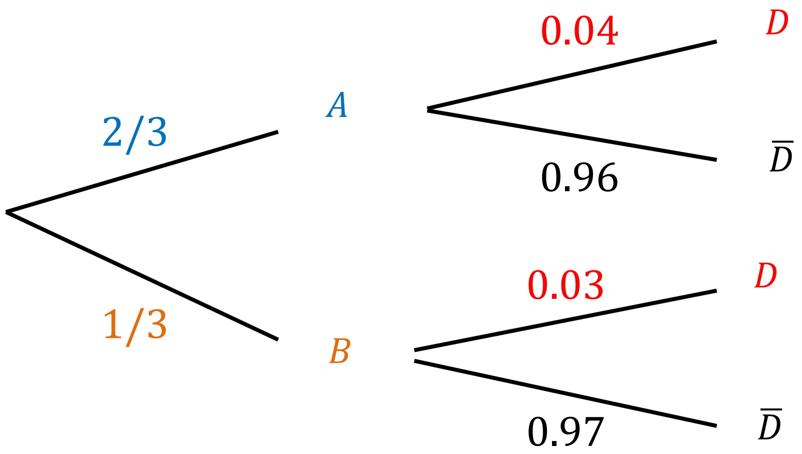
Corrections exercices TD 3

Ex 1:
Un restaurateur s'approvisionne, pour ses légumes, auprès de 2 fournisseurs, le fournisseur A qui lui fournit les 2/3 de ses commandes, et le fournisseur B qui lui fournit le reste.
4 % des légumes livrés par le fournisseur A ne sont pas de qualité satisfaisante, ainsi que 3 % de ceux livrés par le fournisseur B.
Le restaurateur prend au hasard dans son frigo une salade.
On note les événements suivants :

- A : « la salade a été livrée par le fournisseur A »
- B : « la salade a été livrée par le fournisseur B »
- D : « la salade n'est pas de qualité satisfaisante » (D comme défectueux)

1. Représenter le problème sous forme de graphe



2. Quelle est la probabilité que la salade choisie ne soit pas de qualité satisfaisante ?

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) \\ &= P(D / A) \times P(A) + P(D / B) \times P(B) \\ &= 0.04 \times \tfrac{2}{3} + 0.03 \times \tfrac{1}{3} \\ &= 0.037 \end{aligned}$$

3. Le restaurateur a pris une salade de qualité satisfaisante. Quelle est la probabilité qu'elle vienne du fournisseur A ?

On sait que a salade est satisfaisante donc $\bar{D}$ vérifié. On cherche

$$P(A / \bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D} \cap A)}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D} / A) \times P(A)}{1 - P(D)} = \frac{0.96 \times \frac{2}{3}}{0.963} = 0.66$$

Ex 2:
Pour lancer une action promotionnelle, une entreprise propose le jeu suivant: 3 millions de cartes-jeux sont mises à la disposition des points de vente. A chaque passage en caisse, le client reçoit une carte-jeu.
Parmi les cartes jeux :

- 1 million permettent de gagner 10 €
- 100 000 remboursent le client de son achat soit en moyenne 150 €
- 10 offrent une année d'approvisionnement gratuit, soit une valeur de 12 000 €.

1. Calculer les probabilités P_1, P_2, et P_3 de gagner respectivement 10 €, 150 € et 12 000 €.

$P_1 = \frac{10^6}{3\times10^6} = \frac{1}{3} = 0.33$; $P_2 = \frac{100\ 000}{3\times10^6} = \frac{1}{30} = 0.033$; $P_3 = \frac{10}{3\ 000\ 000} = \frac{1}{300\ 000} = 3.33 \times 10^6$

2. En déduire l'espérance de gain.

X la variable aléatoire représentant le gain avec une carte jeu.
X peut prendre les valeurs 0, 10, 150 ou 12000
L'espérance de gain représente le gain qu'on peut espérer (en moyenne) avec une carte jeu

$$E(X) = \sum_{k=0}^{s} k \times P(X = k) = 0 \times P_0 + 10 \times P_1 + 150 \times P_2 + 12000 \times P_3$$
$$= 3.33 + 5 + 0.04 = 8.37$$

Avec une carte on gagnera en moyenne 8.37 euro
Rq : $P_0 = 1 - (P_1 + P_2 + P_3)$

3. Quelle est la probabilité de gagner 150 € si 500 000 cartes-jeux ont déjà été distribuées,
   dont 200 000 cartes gagnantes à 10 €
   30 000 cartes gagnantes à 150 €
   8 cartes gagnantes à 12 000 €.

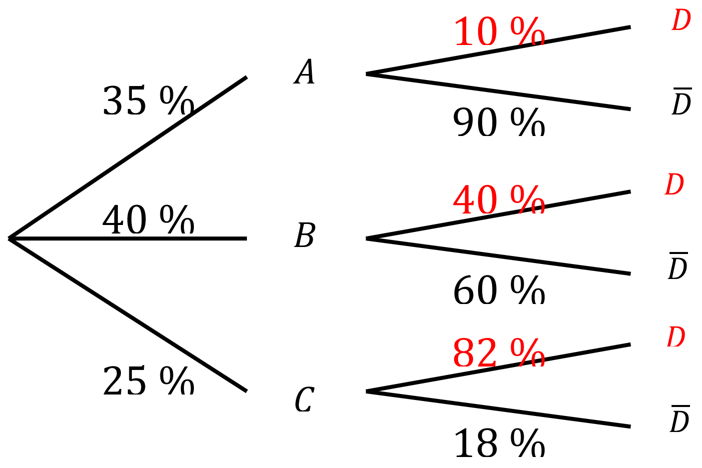
$P(X = 150) = \frac{30\ 000}{500\ 000} = 0.06$

Ex 3:
3 professeurs A, B et C sont susceptibles de poser le sujet d'un certain examen. On sait que le professeur A pose le sujet dans 35 % des cas, que B le pose dans 40 % des cas, et que C le pose dans 25 % des cas. Les étudiants redoutent qu'une certaine partie du programme (notée D, comme difficile) ne tombe à l'examen.
D'après les renseignements obtenus auprès des étudiants des années passées, on estime que : p(D/A) = 0.1 , p(D/B) = 0.4 et p(D/C) = 0.82.

1. Quel est l'enseignant que les élèves redoutent le plus ? Pourquoi ?

Le professeur C, car c'est lui qui pose le plus souvent la partie difficile.

2. Représenter graphiquement le problème.



3. L'examen a lieu, et la partie D du programme est bien présente dans le sujet.
Donner la probabilité pour que le professeur A ait posé le sujet.

Probabilité que la partie D tombe à l'examen

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B) + P(D|C) \times P(C)$$
$$= 0.1 \times 0.35 + 0.4 \times 0.4 + 0.82 \times 0.25 = 0.4$$

$$P(A / D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0.1 \times 0.35}{P(D)} = \frac{0.04 \times \frac{2}{3}}{0.037} = 0.72$$

Ex 4:

Un sac contient 4 boules noires et 2 boules blanches.
Pour jouer, il faut miser 10 €.
Un joueur tire deux boules simultanément dans l'urne (donc sans remise).
Si les 2 boules sont noires, il récupère sa mise.
Si les 2 boules sont blanches, il gagne 100 €.
Si les 2 boules sont de couleur différente, le joueur perd sa mise.
On notera X le gain net du joueur.

Donner la distribution de probabilité de ce jeu et l'espérance et la variance de gain.
Ne pas oublier de commenter.

Le gain net peut prendre les valeurs -10 ; 0 ou 90 euros

X=k	-10	0	90	Total
P(X=k)	0.53	0.4	0.07	1
k×P(X=k)	-5.3	0	6.3	1
k^2×P(X=k)	53	0	567	620

$$P(X = -10) = P(2\ boules\ différentes) = \frac{C_4^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \frac{4 \times 2}{15} = 0.53$$

$$P(X = 0) = P(2\ boules\ noires) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15} = 0.4$$

$$P(X = 90) = P(2\ boules\ blanches) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15} = 0.07$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{s} k \times P(X = k) = 1$$

$$V(X) = \sum_{k=0}^{s} k^2 \times P(X = k) - E(X)^2 = 620 - 1^2 = 619$$

On peut espérer gagner 1 euros en misant 10 euros