Exercices TD 4

Ex 1:

Robin des Bois n'est pas en forme: il n'atteint sa cible qu'une fois sur quatre en moyenne.
Il dispose de 7 flèches. On pose X le nombre de fois où il atteint sa cible.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier

   X suit une loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = \frac{1}{4} = 0.25$: $X \sim B(7; 0.25)$

   (7 expériences, 2 valeurs possibles succès ou échec, on suppose que la proba de succès est identique pour chaque expérience)

2. Calculer la probabilité pour qu'il atteigne sa cible 2 fois exactement.

   $P(X = 2) = C_7^2 \times 0.25^2 \times (1 - 0.25)^{7-2} = 0.31$

3. Calculer la probabilité pour qu'il atteigne sa cible au plus une fois.

   $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.44$

   $P(X = 0) = C_7^0 \times 0.25^0 \times (1 - 0.25)^{7-0} = 0.13$

   $P(X = 1) = C_7^1 \times 0.25^1 \times (1 - 0.25)^{7-1} = 0.31$

4. Calculer la probabilité pour qu'il atteigne sa cible au moins 2 fois.

   $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 0) = 1 - 0.44 = 0.56$

Ex 2:

Une société constate que 3 % de ses comptes-clients sont impayés.
Le comptable choisit 5 comptes au hasard.

Donner la loi du nombre de comptes impayés. Justifier.
On pose X le nombre de comptes impayés.
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0.03$ (Répétition 5 fois d'une expérience à 2 éventualités (succès et échec).
$X \sim B(5; 0.03)$

Quelle est la probabilité:

1. qu'aucun des 5 comptes ne soit impayé

   $P(X = 0) = C_5^0 \times 0.03^0 \times (1 - 0.03)^{5-0} = 0.86$

2. qu'exactement 2 comptes soient impayés

   $P(X = 2) = C_5^2 \times 0.03^2 \times (1 - 0.03)^{5-2} = 0.01$

3. que plus de 3 comptes soient impayés

   $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 0$

   $car\ P(X = 1) = C_5^1 \times 0.03^1 \times (1 - 0.03)^{5-1} = 0.13$

4. qu'il y ait une proportion de 20 % de comptes impayés.

20% de compte impayés, c'est-à-dire $5 \times \frac{20}{100} = 1$ compte
On cherche donc $P(X = 1) = C_5^1 \times 0.03^1 \times (1 - 0.03)^{5-1} = 0.13$

Ex 3:

Utiliser les tables de loi de Poisson pour calculer les probabilités suivantes:

1. $P(X = 2) = 0.2240$ où $X \sim P(3)$

2. $P(X = 3) = \frac{e^{-0.5} \times 0.5^3}{3!} = 0.01$ où $X \sim \mathrm{P}(0.5)$ (pas dans les tables, faire le calcul)

3. $P(X \leq 5) = 0.191$ où $X \sim \mathrm{P}(8)$

4. $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.433 = 0.567$ où $X \sim \mathrm{P}(4)$

5. $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$ où $X \sim \mathrm{P}(10)$

6. $P(X < 5) = P(X \leq 4) = 0.947$ où $X \sim \mathrm{P}(2)$

7. P(2 ≤ X < 5) où $X \sim \mathrm{P}(5)$

$P(2 \leq X < 5) = P(2 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 1) = 0.440 - 0.040 = 0.4$
$= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.0842 + 0.1404 + 0.1755 = 0.4001$

8. P(11 < X<13) où $X \sim \mathrm{P}(6)$

$P(11 < X < 13) = P(12 \leq X \leq 12) = P(X = 12) = 0.0113$

Ex 4:

A un distributeur automatique de billets d'une banque, se présentent, en moyenne, 5 clients par heure. On supposera que les arrivées de ces personnes sont distribuées au hasard et indépendamment les unes des autres. On note X le nombre de clients se présentant par heure.

Donner la loi de X. Justifier.

X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$: $X \sim P(5)$

En effet, on observe un flux de clients sur une période de temps d'une heure (flux et période de temps). Comme on observe en moyenne 5 clients par heure, le paramètre de la loi de Poisson qui correspond à la moyenne est égale à 5.

Quelle est la probabilité que, dans une heure,

a. plus de 10 clients (inclus) se présentent à ce distributeur ?

$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0.968 = 0.032$

b. le distributeur reste inactif pendant une heure entière ?

$P(X = 0) = 0.0067$

c. se présentent entre 5 et 10 personnes (incluses) ?

$P(5 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X < 5) = P(X \leq 10) - P(X \leq 4)$
$= 0.986 - 0.440 = 0.546$

On estime que chaque client retire en moyenne 60 €.
Quelle est la probabilité que plus de 1000 € soient retirés en 1 heure ?

Il faut au moins 17 clients pour que plus de 1000 euros soit retirés (car $\frac{1000}{60} = 16.67$).

$P(X \geq 17) = 0$

Quelle somme doit contenir le distributeur pour que la probabilité de ne pas être vidé dans un week end de 48h dépasse 99 % ?

On cherche k tel que $P(X \leq k) \geq 0.99$

On obtient $k = 11$ car $P(X \leq 11) = 0.995$

Le distributeur doit avoir suffisamment d'argent pour contenter 11 clients par heure c'est-à-dire

$$Somme\ pour\ 48\ h = 11 \times 60 \times 48 = 31680\ euros.$$

Avec 31680 euros, on a une probabilité ≥ 0.99 de ne pas vider le distributeur.

Table des probabilités de la loi de Poisson : P(X= k)

Probabilité $P(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$

x \ λ	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,3679	0,3347	0,2707	0,2052	0,1494	0,1057	0,0733	0,0500	0,0337
2	0,1839	0,2510	0,2707	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	0,1125	0,0842
3	0,0613	0,1255	0,1804	0,2138	0,2240	0,2158	0,1954	0,1687	0,1404
4	0,0153	0,0471	0,0902	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	0,1898	0,1755
5	0,0031	0,0141	0,0361	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	0,1708	0,1755
6	0,0005	0,0035	0,0120	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	0,1281	0,1462
7	0,0001	0,0008	0,0034	0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	0,0824	0,1044
8		0,0001	0,0009	0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	0,0463	0,0653
9			0,0002	0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	0,0232	0,0363
10				0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	0,0104	0,0181
11					0,0002	0,0007	0,0019	0,0043	0,0082
12					0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0034
13						0,0001	0,0002	0,0006	0,0013
14							0,0001	0,0002	0,0005
15								0,0001	0,0002

Probabilité $P(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$

x \ λ	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5
0	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0225	0,0149	0,0098	0,0064	0,0041	0,0027	0,0017	0,0011	0,0007
2	0,0618	0,0446	0,0318	0,0223	0,0156	0,0107	0,0074	0,0050	0,0034
3	0,1133	0,0892	0,0688	0,0521	0,0389	0,0286	0,0208	0,0150	0,0107
4	0,1558	0,1339	0,1118	0,0912	0,0729	0,0573	0,0443	0,0337	0,0254
5	0,1714	0,1606	0,1454	0,1277	0,1094	0,0916	0,0752	0,0607	0,0483
6	0,1571	0,1606	0,1575	0,1490	0,1367	0,1221	0,1066	0,0911	0,0764
7	0,1234	0,1377	0,1462	0,1490	0,1465	0,1396	0,1294	0,1171	0,1037
8	0,0849	0,1033	0,1188	0,1304	0,1373	0,1396	0,1375	0,1318	0,1232
9	0,0519	0,0688	0,0858	0,1014	0,1144	0,1241	0,1299	0,1318	0,1300
10	0,0285	0,0413	0,0558	0,0710	0,0858	0,0993	0,1104	0,1186	0,1235
11	0,0143	0,0225	0,0330	0,0452	0,0585	0,0722	0,0853	0,0970	0,1067
12	0,0065	0,0113	0,0179	0,0263	0,0366	0,0481	0,0604	0,0728	0,0844
13	0,0028	0,0052	0,0089	0,0142	0,0211	0,0296	0,0395	0,0504	0,0617
14	0,0011	0,0022	0,0041	0,0071	0,0113	0,0169	0,0240	0,0324	0,0419

Table des probabilités cumulées de la loi de Poisson: P(X≤ k)

	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,368	0,135	0,050	0,018	-	-	-	-
1	0,736	0,406	0,199	0,092	0,040	0,017	-	-
2	0,920	0,677	0,423	0,238	0,125	0,062	0,030	0,014
3	0,981	0,857	0,647	0,433	0,265	0,151	0,082	0,042
4	0,996	0,947	0,815	0,629	0,440	0,285	0,173	0,100
5	0,999	0,983	0,916	0,785	0,616	0,446	0,301	0,191
6	1	0,995	0,966	0,889	0,762	0,606	0,450	0,313
7		0,999	0,988	0,949	0,867	0,744	0,599	0,453
8		1	0,996	0,979	0,932	0,847	0,729	0,593
9			0,999	0,992	0,968	0,916	0,830	0,717
10			1	0,997	0,986	0,957	0,901	0,816
11				0,999	0,995	0,980	0,947	0,888
12				1	0,998	0,991	0,973	0,936
13					0,999	0,996	0,987	0,966
14					1	0,999	0,994	0,983
15						0,999	0,998	0,992
16						1	0,999	0,996
17							1	0,998
18								0,999
19								1