CORRECTIONS TD 5

Exercice 1

Soit U la loi normale centrée réduite $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1. Calculer les probabilités

— $\mathbb{P}(X < 13)$ avec $X \sim \mathcal{N}(20,5)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 13) &= \mathbb{P}(U < \frac{13-20}{5}) = \mathbb{P}(U < -1.4)\\ &= \mathbb{P}(U > 1.4) \quad \text{par symétrie de la loi normale,}\\ &= 1 - \mathbb{P}(U < 1.4) \quad \text{car l'aire sous la courbe vaut 1.}\\ &= 1 - 0.9192 = 0.0808 \quad \text{d'après la table de la loi normale.}\end{aligned}$$

— $\mathbb{P}(X > 0.3)$ où $X \sim \mathcal{N}(0.5, 0.12)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 0.3) &= \mathbb{P}(U > \frac{0.3-0.5}{0.12}) = \mathbb{P}(U > -1.67)\\ &= \mathbb{P}(U < 1.67) \quad \text{par symétrie de la loi normale,}\\ &= 0.9525 \quad \text{d'après la table de la loi normale.}\end{aligned}$$

— $\mathbb{P}(X < 170)$ où $X \sim \mathcal{N}(150, 50)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 170) &= \mathbb{P}(U < \frac{170-150}{50}) = \mathbb{P}(U < 0.4)\\ &= 0.6554 \quad \text{d'après la table de la loi normale.}\end{aligned}$$

— $\mathbb{P}(X > 200)$ où $X \sim \mathcal{N}(500, 155)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 200) &= \mathbb{P}(U > \frac{200-500}{155}) = \mathbb{P}(U > -1.94)\\ &= \mathbb{P}(U < 1.94) \quad \text{par symétrie de la loi normale,}\\ &= 0.9738 \quad \text{d'après la table de la loi normale.}\end{aligned}$$

— $\mathbb{P}(10 < X < 20)$ où $X \sim \mathcal{N}(10, 12)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(10 < X < 20) &= \mathbb{P}(X < 20) - \mathbb{P}(X < 10)\\ &= \mathbb{P}(U < \frac{20-10}{12}) - \mathbb{P}(U < \frac{10-10}{12}) = \mathbb{P}(U < 0.83) - \mathbb{P}(U < 0)\\ &= 0.7967 - 0.5 \quad \text{d'après la table de la loi normale.}\\ &= 0.2967\end{aligned}$$

— $\mathbb{P}(80 < X < 110)$ où $X \sim \mathcal{N}(100, 50)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(80 < X < 110) &= \mathbb{P}(U < \frac{110-100}{50}) - \mathbb{P}(U < \frac{80-100}{50}) = \mathbb{P}(U < 0.2) - \mathbb{P}(U < -0.4)\\ &= 0.5792 - [1 - \mathbb{P}(U < 0.4)] \quad \text{symetrie, et aire} = 1.\\ &= 0.5793 - 1 + 0.6554 = 0.2347\end{aligned}$$

2. Trouver le seuil x tel que

— $\mathbb{P}(X < x) = 0.8907$ où $X \sim \mathcal{N}(1000, 500)$

$$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(U < \frac{x-1000}{500}) = 0.8907$$

D'après la table on sait que $\frac{x-1000}{500} = 1.23$
Donc $x = 1615$.

— $\mathbb{P}(X < x) = 0.1788$ où $X \sim \mathcal{N}(5, 2)$

$$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(U < \frac{x-5}{2}) = 0.1788$$

Comme $0.1788 < 0.5$, on ne peut pas lire la valeur correspondante dans la table (car $\frac{x-5}{2} < 0$). En utilisant la propriété de l'aire $= 1$, on a de manière équivalente $\mathbb{P}(U > \frac{x-5}{2}) = 0.8212$. Par symétrie on obtient que $\mathbb{P}(U < \frac{5-x}{2}) = 0.8212$. D'après la table on a finalement que $\frac{5-x}{2} = 0.92$ et donc que $x = 5 - 2 \times 0.92 = 3.16$.

— $\mathbb{P}(8 < X < x) = 0.6444$ où $X \sim \mathcal{N}(10, 5)$
$\mathbb{P}(8 < X < x) = \mathbb{P}(X < x) - \mathbb{P}(X < 8) = \mathbb{P}(U < \frac{x-10}{5}) - \mathbb{P}(U < \frac{8-10}{5})$.
$\mathbb{P}(U < \frac{8-10}{5}) = \mathbb{P}(U < -0.4) = 1 - \mathbb{P}(U < 0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446$.
On a donc $\mathbb{P}(U < \frac{x-10}{5}) = 0.6444 + 0.3446 = 0.989$.
D'après la table on a $\frac{x-10}{5} = 2.29$, c'est à dire $x = 5 \times 2.29 + 10 = 21.45$.

Exercice 2

Soit X la durée d'utilisation d'un pneu. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(60000, 12000)$.

1. Probabibilité qu'un pneu ne tienne pas une distance de 47000 km

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 47000) &= \mathbb{P}(U < \frac{47000-60000}{12000}) = \mathbb{P}(U < -1.08)\\ &= \mathbb{P}(U > 1.08) \quad \text{par symétrie.}\\ &= 1 - \mathbb{P}(U < 1.08) \quad \text{car aire=1.}\\ &= 1 - 0.8599 = 0.1401\end{aligned}$$

2. Probabibilité qu'un pneu puisse tenir au moins une distance de 100000 km

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 100000) &= \mathbb{P}(U > \frac{100000 - 60000}{12000}) = \mathbb{P}(U > 3.33)\\ &= 1 - \mathbb{P}(U < 3.33) \quad \text{car aire} = 1.\\ &\simeq 1 - 1 = 0 \quad \text{car } \mathbb{P}(U < 3.33) \simeq 1.\end{aligned}$$

Avec un logiciel de statistique (plus précis sur la table), on trouve $\mathbb{P}(X > 100000) \simeq 0.0004$.

3. Distance x pour laquelle on a 98% de chance de devoir changer le pneu

$$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(U < \frac{x - 60000}{12000}) = 0.98$$

D'après la table on a $\frac{x-60000}{12000} = 2.05$, c'est-à-dire $x = 84600$.

<u>Exercice 3</u>

Soit X la température maximale de résistance à la chaleur d'une gomme de pneumatiques. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(120, 10)$.

1. Probabilité que la gomme résiste jusqu'à 131.5°

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 131.5) &= \mathbb{P}(U > \frac{131.5 - 120}{10})\\ &= 1 - \mathbb{P}(U < 1.15) \quad \text{car aire} = 1\\ &= 1 - 0.8749 = 0.1251\end{aligned}$$

2. On accepte une gomme si elle résiste à une chaleur comprise entre 118° et 132°. La probabilité de rebus p est $p = 1 - \mathbb{P}(118 < X < 132)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(118 < X < 132) &= \mathbb{P}(U < \frac{132 - 120}{10}) - \mathbb{P}(U < \frac{118 - 120}{10})\\ &= \mathbb{P}(U < 1.2) - \mathbb{P}(U < -0.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U < -0.2) &= \mathbb{P}(U > 0.2) = 1 - \mathbb{P}(U < 0.2) \quad \text{par symétrie et car aire} = 1\\ &= 1 - 0.5793 = 0.4207\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(U < 1.2) = 0.8849$ Donc la probabilité de rebus est $p = 1 - 0.8849 + 0.4207 = 0.5358$.

3. On cherche une valeur de température x tel que 99% des pneus soient acceptables, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X > x) = 0.99$.

Par symétrie de la loi normale on a

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(U > \frac{x - 120}{10}) = 0.99 \Leftrightarrow \mathbb{P}(U < \frac{120 - x}{10}) = 0.99$$

D'après la table on a $\frac{120-x}{10} = 2.33$, c'est-à-dire $x = 96.7$.