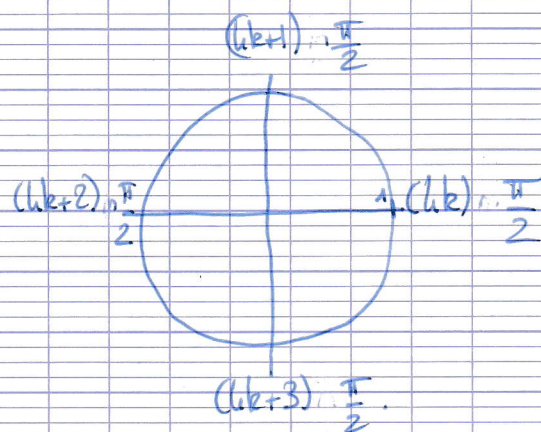


Radus 0 - TD1

Q1

1) Soit $m \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{P}$: $\underbrace{\cos\left(m \frac{\pi}{2}\right) = 1}_P \Rightarrow \underbrace{m \text{ pair}}_Q$



(a) (i) Negation: P et non Q
 $\cos\left(m \frac{\pi}{2}\right) = 1$ et m impair

(ii) Contraposée: m impair $\Rightarrow \cos\left(m \frac{\pi}{2}\right) \neq 1$
 non $Q \Rightarrow$ non P

(iii) Réciproque: $Q \Rightarrow P$
 m pair $\Rightarrow \cos\left(m \frac{\pi}{2}\right) = 1$

(b) Véracité: $\cos\left(m \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : m \frac{\pi}{2} = 2k\pi$
 $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : m = 4k$
 $\Rightarrow m$ pair.

$\mathcal{P}_q$: la réciproque est fautive, contre exemple $m=2$.
 Alors $m \frac{\pi}{2} = \pi$ et $\cos\left(m \frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 1$.

(c) Véracité de la contraposée = vraie puisque l'implication directe est vraie
Véracité de la réciproque = fautive

Réexpliquer que $(\text{non}(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \text{ et non } B)$

2°) (a) Negation de $P \Rightarrow (Q \text{ et } R)$.

$$\begin{aligned} \text{non}(P \Rightarrow (Q \text{ et } R)) &\Leftrightarrow P \text{ et non}(Q \text{ et } R) \\ &\Leftrightarrow P \text{ et (non } Q \text{ ou non } R) \\ &\Leftrightarrow (P \text{ et non } Q) \text{ ou } (P \text{ et non } R) \end{aligned}$$

(b) Négation de $P \wedge (Q \Rightarrow R)$.

$$\begin{aligned} \neg (P \wedge (Q \Rightarrow R)) &\Leftrightarrow \neg P \text{ et } \neg (Q \Rightarrow R) \\ &\Leftrightarrow \neg P \text{ et } (Q \text{ et } \neg R) \\ &\Leftrightarrow \neg P \text{ et } Q \text{ et } \neg R. \end{aligned}$$

(c) Négation de $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$

$$\begin{aligned} \neg ((P \text{ et } Q) \Rightarrow R) &\Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ et } \neg R \\ &\Leftrightarrow P \text{ et } Q \text{ et } \neg R. \end{aligned}$$

$$\neg ((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R))$$

Ex 2

1) Sans table de vérité:

$$\begin{aligned} [(P \wedge Q) \Rightarrow R] &\Leftrightarrow [\neg (P \wedge Q) \text{ ou } R] \\ &\Leftrightarrow [(\neg P \text{ et } \neg Q) \text{ ou } R] \\ &\Leftrightarrow [\neg P \text{ ou } R] \text{ et } [\neg Q \text{ ou } R] \\ &\Leftrightarrow [P \Rightarrow R] \text{ et } [Q \Rightarrow R] \end{aligned}$$

Avec table de vérité:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$[(P \wedge Q) \Rightarrow R]$ ie. $[\neg (P \wedge Q) \text{ ou } R]$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$ $Q \Rightarrow R$
F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V

$$2') P \vee ((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \\ \Leftrightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

Sans table de vérité:

$$(P \wedge Q) \Rightarrow R \Leftrightarrow (\text{non}(P \wedge Q) \vee R) \\ \Leftrightarrow (\text{non } P \vee \text{non } Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow \text{non } P \vee (\text{non } Q \vee R) \quad | \quad \Leftrightarrow \text{non } Q \vee (\text{non } P \vee R) \\ \Leftrightarrow \text{non } P \vee (Q \Rightarrow R) \quad | \quad \Leftrightarrow \text{non } Q \vee (P \Rightarrow R) \\ \Leftrightarrow P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \quad | \quad \Leftrightarrow Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

Avec table de vérité:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	de même pour $Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
F	F	F	F	V	V	V	
F	F	V	F	V	V	V	
F	V	F	F	V	F	V	
F	V	V	F	V	V	V	
V	F	F	F	V	V	V	
V	F	V	F	V	V	V	
V	V	F	V	F	F	F	
V	V	V	V	V	V	V	

Q3:

$$1') x \in \mathbb{R}.$$

$$\underbrace{(x^4 = 16)}_P \Leftrightarrow \underbrace{(x=2 \vee x=-2)}_Q$$

équivalence car dans $\mathbb{R}$, $x^2 = -4$ est exclu.

Donc $P \Leftrightarrow Q$ (est nécessaire et suffisante pour Q)

$$2') z \in \mathbb{C}. \quad \underbrace{(z^4 = 16)}_P \Leftrightarrow \underbrace{(z=2 \vee z=-2)}_Q$$

$Q \Rightarrow P$ car si $z=2$ ou $z=-2$, $z^4=16$.

Peut être une condition nécessaire pour Q .

$$3^{\circ}) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\underbrace{f \text{ est continue en } x=0}_P \Leftrightarrow \underbrace{f \text{ est dérivable en } x=0}_Q$$

$Q \Rightarrow P$. Contre-exemple à $P \Rightarrow Q$: $x \mapsto |x|$.

P est une condition nécessaire par Q .

$$4^{\circ}) (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ suite réelle.}$$

$$\underbrace{(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est monotone}}_P \Leftrightarrow \underbrace{(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}}_Q$$

$Q \Rightarrow P$. Contre-exemple suite monotone décroissante.

P est une condition nécessaire par Q .

$$5^{\circ}) x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\underbrace{x > 0 \text{ et } y > 0}_P \Rightarrow \underbrace{xy > 0}_Q$$

$P \Rightarrow Q$. Contre-exemple $x < 0$ et $y < 0$.

P est une condition suffisante par Q .

6) est le théorème de Pythagore. Est une condition nécessaire et suffisante.