

62 //

(Raisonnement par disjonction des cas).

1') $\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < x^2 + 2x + 6. \quad (I)$

"Petit dit valeur absolue dit deux cas".

1er cas : Si $x-1 \geq 0$ (i.e. si $x \geq 1$)

Alors $|x-1| = x-1$

et (I) $\Leftrightarrow x-1 < x^2 + 2x + 6$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 5 > 0$

$\Delta = -19$, donc le trinôme est toujours > 0

2ème cas : Si $x-1 < 0$ (i.e. si $x < 1$)

Alors $|x-1| = -(x-1) = 1-x$

et (I) $\Leftrightarrow 1-x < x^2 + 2x + 6$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 3 > 0$

$\Delta = -3$, donc le trinôme est toujours > 0

Enfin, l'inégalité (I) est vraie pour tout x dans $\mathbb{R}$.

6.11 suite 2°b) Exemple de disjonction au 4 cas:

- ① $\exists k \in \mathbb{N} : m = 4k, \cos(m \frac{\pi}{2}) = \cos 2k\pi = 1$
- ② $\exists k \in \mathbb{N} : m = 4k+1, \sin(m-1) \frac{\pi}{2} = \sin 4k\pi = 0$
- ③ $\exists k \in \mathbb{N} : m = 4k+2, \cos(m-2) \frac{\pi}{2} = \cos 2k\pi = 1$
- ④ $\exists k \in \mathbb{N} : m = 4k+3, \text{ comme le 2° cas.}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, le produit

$$(1 - \cos(m \frac{\pi}{2})) \times \sin((m-1) \frac{\pi}{2}) \times (1 - \cos((m-2) \frac{\pi}{2}))$$

est nul.

6.12 Soit $u_0 \in [0; 1]$. On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$.
Rq $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$. (P_n)

Initialisation: Par $n=0, u_0 \in [0; 1]$, donc (P₀) vraie.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ tq (P_n) vraie.

$$0 \leq u_n \leq 1$$

Comme la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$,
 $0 \leq u_n^2 \leq 1^2$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$,
d'où $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ par cette propriété de la fct. carré.
 $0 \leq u_{n+1} \leq 1$, i.e. (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.

6.13 1°) Il est faux que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n^2$.
Contre-exemple par $n=3, 2^3=8$ et $3^2=9$.

Ex 13-mite

2°) $\forall n \geq 4, 2^n \geq n^2$ (P_n)

Initialisation : pour $n=4$

$$2^4 = 16 ; 4^2 = 16.$$

Donc (P_4) est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 4$ $\frac{1}{n}$ (P_n) vraie.

$$2^n \geq n^2$$

$$2 \times 2^n \geq 2n^2$$

$$2^{n+1} \geq 2n^2$$

Or pour $n \geq 3, 2n^2 \geq (n+1)^2$ (I)

Preuve: (I) $\Leftrightarrow 2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 \geq 0$$

$$\text{avec } \Delta = 8, \alpha_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$$

$$\alpha_2 = 1 + \sqrt{2} < 3$$

Donc $\forall n \geq 3, n^2 - 2n - 1 \geq 0$.

Ainsi, par transitivité, $2^{n+1} \geq (n+1)^2$, (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 4, 2^n \geq n^2$.

Ex 14

Soit $u_0 = u_1 = 1$, et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$. (P_n) [récurrence double]

Initialisation : Par $n=0$, $u_0 = 1$ et $1 \geq 0$, (P_0) vraie.

Par $n=1$, $u_1 = 1$ et $1 \geq 1$. (P_1) vraie

Hérédité : Supposons (P_m) vraie pour $m \in \mathbb{N}^*$.

[(P_m) vraie]

Il vient $u_{m+1} = 2u_m + u_{m-1}$

avec $u_m \geq m$, donc $2u_m \geq 2m$ (P_m)

et $u_{m-1} \geq m-1$ (P_{m-1}).

21

$$\text{Par suite } 2u_n + u_{n-1} \geq 2n + n - 1$$

$$\text{i.e. } u_{n+1} \geq 3n - 1.$$

$$\text{Or } n \geq 1 \Rightarrow 2n \geq 2 \Rightarrow 3n - 1 \geq n + 1$$

$$\text{Donc par récurrence } u_{n+1} \geq n+1.$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n.$$