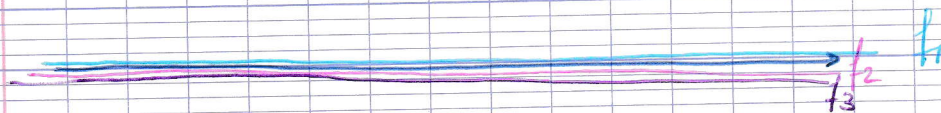


(27

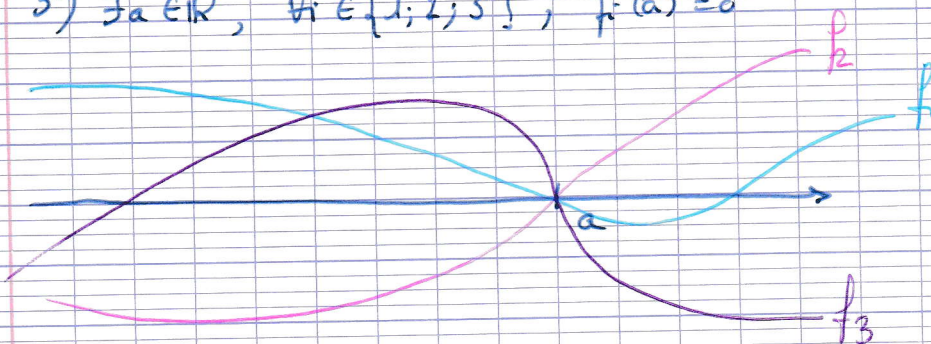
1') $\exists a \in \mathbb{R}, \exists i \in \{1; 2; 3\} : f_i(a) = 0$



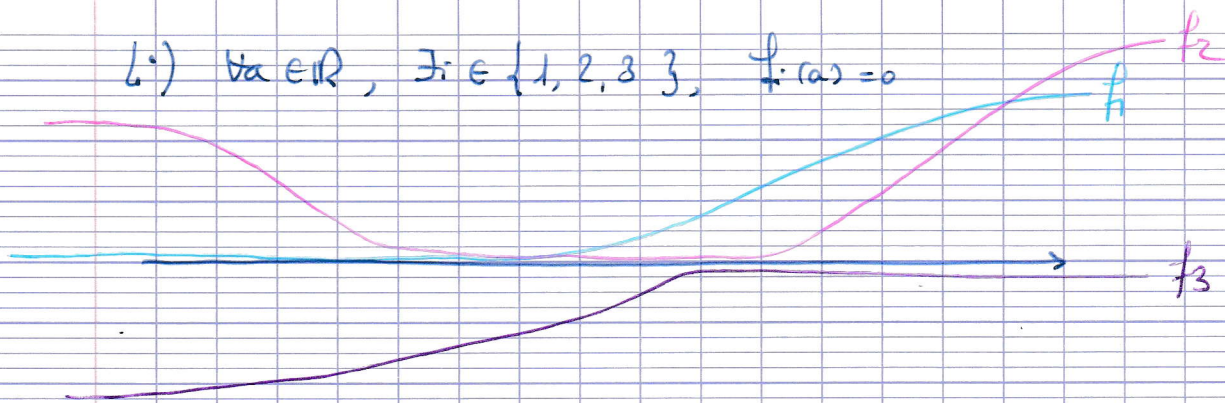
2') $\forall a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1; 2; 3\}, f_i(a) = 0$



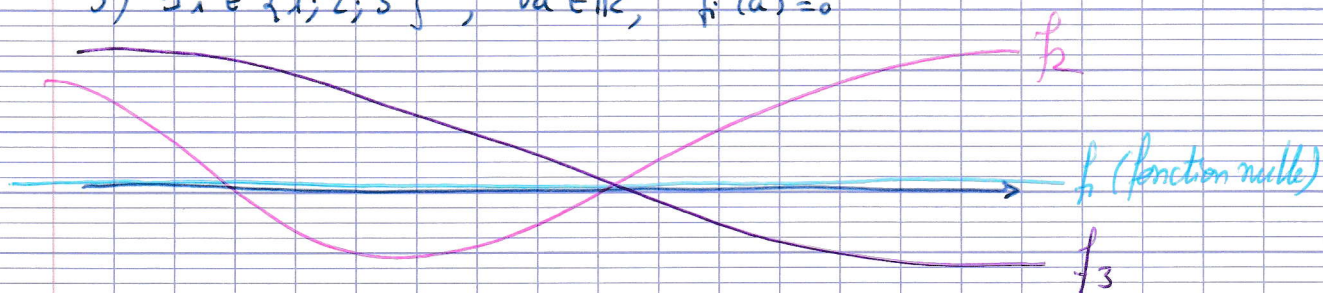
3') $\exists a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1; 2; 3\}, f_i(a) = 0$



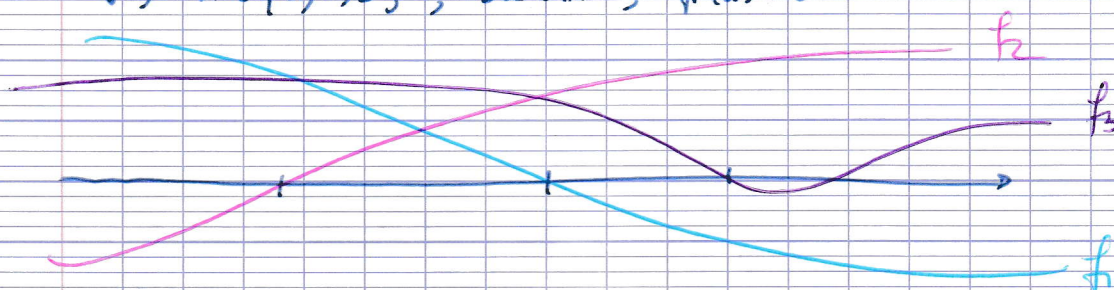
4.) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists i \in \{1, 2, 3\}, f_i(a) = 0$



5.) $\exists i \in \{1, 2, 3\}, \forall a \in \mathbb{R}, f_i(a) = 0$

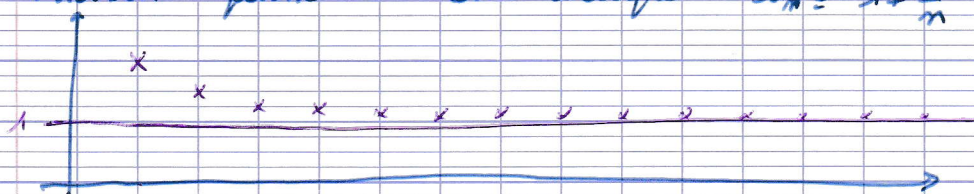


6.) $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \exists a \in \mathbb{R}, f_i(a) = 0$



Q 8

P: Toute suite de réels strictement décroissante converge vers 0.
 Assertion fautive - Contre-exemple $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$



Strictement décroissante et converge vers 0.

6.9Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Pg } (\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Leftrightarrow (a = 0)$$

Notons $P: \forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$ et $Q: a = 0$ Montrer que $P \Leftrightarrow Q$, c'est montrer que $P \Rightarrow Q$ et que $Q \Rightarrow P$.• Pg $Q \Rightarrow P$ Supposons $a = 0$. Alors $\forall \varepsilon > 0, 0 < \varepsilon$, i.e. $|a| < \varepsilon$.

Donc cette implication est vraie.

• Pg $P \Rightarrow Q$

Pour montrer cette implication, on va utiliser sa contraposée:

 $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$

Montrons donc que

$$(a \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0 : |a| \geq \varepsilon).$$

Soit $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

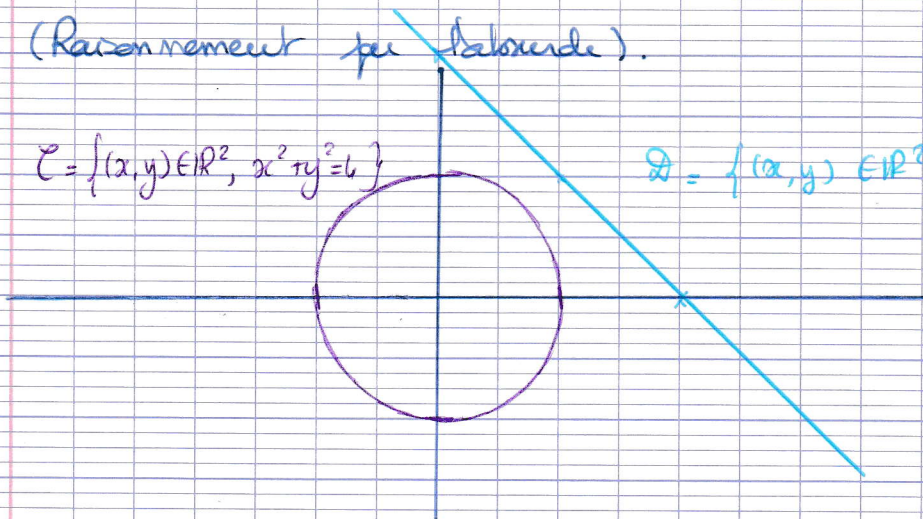
$$\text{Posons } \varepsilon = \frac{|a|}{2}.$$

On a $\varepsilon > 0$, et $|a| \geq \varepsilon$.Donc on a exhibé $\varepsilon > 0$ tq $|a| \geq \varepsilon$.Ainsi l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.Finalement, l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie.6.10

(Raisonnement parabolique).

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 4\}$$

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -x + 6\}$$



Montrons par l'absurde que $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

Supposons $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.

Soit $\Pi \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, $\Pi(x; y)$.

Alors :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (-x + 4)^2 = 6 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x^2 - 8x + 16 = 6 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 12 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 6 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases} \quad \Delta = 16 - 4 \times 1 \times 6 = -8, \\ \text{pas de solution réelle.}$$

On aboutit à une contradiction, donc $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

Ex 11

(Raisonnement par disjonction des cas).

1°) Pg $\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < x^2 + 2x + 6$. (I)

"Peu dit valeur absolue dit deux cas".

1er cas : Si $x-1 \geq 0$ (i.e. si $x \geq 1$)

Alors $|x-1| = x-1$

et (I) $\Leftrightarrow x-1 < x^2 + 2x + 6$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 5 > 0$$

$$\Delta = -19, \text{ donc le trinôme est tjrs } > 0$$

2ème cas : Si $x-1 < 0$ (i.e. si $x < 1$)

Alors $|x-1| = -(x-1) = 1-x$

et (I) $\Leftrightarrow 1-x < x^2 + 2x + 6$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 3 > 0$$

$$\Delta = -3, \text{ donc le trinôme est tjrs } > 0$$

Enfin, l'inégalité (I) est vraie pour tout x dans $\mathbb{R}$.