

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition $I : \cos(n \frac{\pi}{2}) = 1 \implies n$ pair.
 - (a) Écrire la négation, la contraposée puis la réciproque de I .
 - (b) La proposition I est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?
 - (c) Même question pour la contraposée puis pour la réciproque de I .
2. Soit P, Q et R trois propositions. Écrire la négation des assertions suivantes :
 - (a) $P \Rightarrow (Q \text{ et } R)$.
 - (b) P ou $(Q \Rightarrow R)$.
 - (c) $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$.

Exercice 2

Soit P, Q, R et T quatre propositions. Démontrer les assertions suivantes (avec ou sans table de vérité)

1. $((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R))$.
2. $((P \text{ et } Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R))$.

Exercice 3

Quel lien logique existe-t-il entre les propositions P et Q suivantes ? Dire si P est une condition nécessaire, suffisante ou nécessaire et suffisante pour Q .

1. Soit x un réel. $P : "x^4 = 16"$ et $Q : "x = 2 \text{ ou } x = -2"$.
2. Soit z un nombre complexe. $P : "z^4 = 16"$ et $Q : "z = 2 \text{ ou } z = -2"$.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $P : f$ est une fonction continue en $x = 0$, $Q : f$ est une fonction dérivable en $x = 0$.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. $P : \text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est monotone.}$ $Q : \text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}$
5. Soit x et y deux réels. $P : x > 0 \text{ et } y > 0.$ $Q : xy > 0.$
6. Soit A, B et C trois points distincts du plan. $P : ABC$ est un triangle rectangle en A .
 $Q : AB^2 + AC^2 = BC^2.$

Exercice 4

Traduire en langage quantifié les assertions suivantes puis démontrer si elles sont vraies ou fausses.

1. Le produit de deux entiers naturels quelconques est supérieur ou égal à 1.
2. Il existe dans $[0, 2\pi]$ un unique angle dont la somme du sinus et du cosinus vaut 0.
3. La valeur absolue de tout réel négatif est égale à l'opposé de ce réel.
4. La somme de deux réels quelconques est positive si et seulement si les deux réels sont positifs.

Exercice 5

On considère les trois assertions suivantes :

- (a) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}^*)(|x - y| \geq 1).$
- (b) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}*)(|x - y| \geq 1).$
- (c) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}*)(|x - y| \geq 1).$

Écrire la négation de ces trois propositions et démontrer celles parmi les 6 qui sont vraies.

Exercice 6

Traduire en langage quantifié les assertions suivantes.

1. La fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est majorée.
2. La fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas majorée
3. La fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bornée.
4. La fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas bornée.
5. La fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne s'annule jamais.
6. La fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas la fonction nulle.

Exercice 7

Soit f_1, f_2 et f_3 trois fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire graphiquement les assertions suivantes (on s'appliquera à ne pas faire deux graphiques identiques) :

1. $\exists a \in \mathbb{R}, \quad \exists i \in \{1, 2, 3\}, \quad f_i(a) = 0$
2. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad f_i(a) = 0$
3. $\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad f_i(a) = 0$
4. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \exists i \in \{1, 2, 3\}, \quad f_i(a) = 0$
5. $\exists i \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad f_i(a) = 0$
6. $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad f_i(a) = 0$

Exercice 8 (Raisonnement par contre-exemple)

Etudier la véracité de l'assertion P suivante :

P : Toute suite de réels strictement décroissante converge vers 0.

Exercice 9 (Raisonnement par contraposée)

Démontrer l'assertion suivante où a est un réel donné :

$$(\forall \epsilon > 0, \quad |a| < \epsilon) \Leftrightarrow (a = 0)$$

Exercice 10 (Raisonnement par l'absurde)

Soit $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 4\}$ et $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -x + 4\}$. Montrer que $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

Exercice 11 (Raisonnement par disjonction de cas)

1. Montrer que pour tout réel x , $|x - 1| < x^2 + 2x + 4$.
2. (a) Par analogie avec l'assertion justifiant la disjonction en 2 cas vue en cours, écrire une assertion justifiant la disjonction en 3 cas et une assertion justifiant la disjonction en 4 cas.
(b) Montrer que pour tout entier n , $(1 - \cos(n\frac{\pi}{2})) \sin((n-1)\frac{\pi}{2}) (1 - \cos((n-2)\frac{\pi}{2})) = 0$.

Exercice 12 (Raisonnement par récurrence)

Soit $u_0 \in [0, 1]$. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

Exercice 13 (Raisonnement par récurrence).

1. Est-il vrai que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n^2$?
2. Déterminer $n_0 \in \mathbb{N}$ pour que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, 2^n \geq n^2$ soit vraie. Démontrer que pour ce n_0 , $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, 2^n \geq n^2$.

Exercice 14 (Raisonnement par récurrence)

Soit $u_0 = u_1 = 1$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.

Pour aller plus loin :

Exercice 15

On définit les propositions suivantes :

- | | |
|---------------------------------|---|
| (P) "Simon mange des caramels" | (S) "C'est le printemps" |
| (Q) "Simon a mal aux dents" | (T) "J'éternue" |
| (R) "Simon va chez le dentiste" | (U) "Je prends un médicament contre le rhume des foins" |

Donner les correspondances entre les expressions logiques et les phrases ci-dessous.

- | | |
|---|--|
| 1) $T \iff (S \text{ et } (\text{non } U))$, | 2) $(\text{non } R) \text{ et } (\text{non } U)$, |
| 3) $P \text{ et } Q \text{ et } R$, | 4) $S \text{ et } T \text{ et } U$, |
| 5) $Q \iff P$, | 6) $(S \Rightarrow Q) \Rightarrow (S \Rightarrow R)$, |
| 7) $P \Rightarrow (Q \text{ et } R)$, | 8) $S \Rightarrow \text{non } P$, |
| 9) $S \iff P$, | 10) $\text{non } (S \Rightarrow T)$. |

- a) Il est faux de dire que j'éternue si c'est le printemps,
- b) Quand Simon mange des caramels, il a mal aux dents et va chez le dentiste,
- c) Simon mange des caramels, a mal aux dents et va chez le dentiste.
- d) J'éternue si et seulement si c'est le printemps et que je ne prends pas de médicaments contre le rhume des foins,
- e) De deux choses l'une, ou bien c'est le printemps et Simon mange des caramels, ou bien c'est une autre saison et il n'en mange pas,
- f) Simon ne va pas chez le dentiste et je ne prends pas de médicaments contre le rhume des foins,
- g) C'est le printemps, je prends un médicament contre le rhume des foins et j'éternue,
- h) Simon a mal aux dents si et seulement si il mange des caramels,
- i) Si, quand c'est le printemps, Simon a mal aux dents, alors, quand c'est le printemps, il va chez le dentiste,
- j) Au printemps, Simon ne mange pas de caramels.

Exercice 16

On considère les quatre assertions suivantes :

- | | |
|---|--|
| (a) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy \geq 0)$ | (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy > 0)$ |
| (b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy > 0)$ | (d) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy > 0)$ |

Écrire la négation de ces propositions et démontrer celles parmi les 8 qui sont vraies.

Exercice 17

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

Exercice 18

Soit $a \in \mathbb{N}$ un entier impair. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que 2^{n+2} divise l'entier $a^m - 1$ où $m = 2^n$.

Exercice 19

Soit $u_0 = 0, u_1 = 1$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = u_n^2 + u_{n+1}^2$ et $u_{2n+3} = u_{n+1}(u_n + u_{n+2})$.

Exercice 20

Soit $u_0 = -3$ et $u_1 = 2$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq 5n$.