Exercice 1

Soit $P(x, y)$ un prédicat à deux indéterminées réelles x et y.
On définit $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad P(x, y)\}$.

1. Écrire en langage mathématique les phrases suivantes puis décrire l'ensemble $\mathcal{S}$.
   (a) Le prédicat est vérifié par un unique élément de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Aucun élément de $\mathbb{R}^2$ ne vérifie le prédicat.
   (c) Tous les éléments de $\mathbb{R}^2$ vérifient le prédicat.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ dans les cas où, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   (a) $P(x, y) =$ "$x - y = 0$ et $x = 2 + y$ ",
   (b) $P(x, y) =$ "$x^2 + y^2 \geqslant 0$".
   (c) $P(x, y) =$ "$x - y = 0$",
   (d) $P(x, y) =$ "$x^2 + y^2 \leqslant 0$".

Exercice 2

1. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $P(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$. Remplacer les pointillés par l'un des symboles $\in$, $\subset$. Sinon, expliquer pourquoi ces symboles ne conviennent pas.

$$4 \dots \mathbb{N}, \quad 4 \dots P(\mathbb{N}), \quad \{4\} \dots \mathbb{N}, \quad \{4\} \dots P(\mathbb{N}), \quad \{\{4\}\} \dots P(\mathbb{N}),$$

$$\{-1, 1, 2\} \dots P(\mathbb{N}), \quad \{\{1, 2\}, \{2\}\} \dots P(\mathbb{N}), \quad \{\{1, 2\}, 2\} \dots P(\mathbb{N})$$

2. Soit $E = \{0, 7\}$. Expliciter $P(E)$ puis $P(P(E))$.
   Même question avec $E = \emptyset$.

Exercice 3

1. Décrire les ensembles $\{1, 2\} \times \{3, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\} \times \{1, 2\}$ et $\{a, b\}^3$.
2. Déterminer $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times \{-1\})$ et $(\{0\} \times \mathbb{N}) \cap (\mathbb{N} \times \{-1\})$.

Exercice 4

Soit E un ensemble quelconque.

1. Montrer que $\forall X \in P(E)$, $[A \subset X$ et $B \subset X] \Rightarrow A \cup B \subset X$.
2. Montrer que $\forall X \in P(E)$, $[X \subset A$ et $X \subset B] \Rightarrow X \subset A \cap B$.

Exercice 5
Soit X un ensemble, E une partie de X. On note $\overline{A} = \complement_X A$, le complémentaire de A dans X. On pose $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que

$$\mathcal{F} = \left\{ A \in \mathcal{P}(X),\ A \subset E \text{ ou } \overline{E} \subset A \right\}.$$

1. Cas particulier : on prend $X = \{1, 2, 3\}$ et $E = \{1\}$.
   (a) Donner $\mathcal{P}(X)$.
   (b) Donner un élément de $\mathcal{P}(X)$ qui appartient à $\mathcal{F}$ et un qui n'appartient pas à $\mathcal{F}$.
   (c) Déterminer $\mathcal{F}$.
2. Cas général : X est un ensemble quelconque non vide et $E \in \mathcal{P}(X)$.
   (a) Montrer que $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathcal{F}$.
   (b) Montrer que si $A \in \mathcal{F}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{F}$.
   (c) Soit A et B dans $\mathcal{F}$. Montrer que $A \cup B \in \mathcal{F}$ et que $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Exercice 6
Soit E un ensemble. Soit A et B deux sous-ensembles de E.

1. Montrer que $A \subset B \Longleftrightarrow P(A) \subset P(B)$.
2. Comparer les ensembles $P(A \cap B)$ et $P(A) \cap P(B)$.
3. Comparer les ensembles $P(A \cup B)$ et $P(A) \cup P(B)$.

Exercice 7
Soit E un ensemble quelconque.

1. Montrer que $\forall (A, B) \in (P(E))^2,\ A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.
2. *(Phénomène d'absorption)*
   Montrer que $\forall (A, B) \in (P(E))^2,\ A \cup (A \cap B) = A$ et $A \cap (A \cup B) = A$.
3. Montrer que $\forall (A, B) \in (P(E))^2,\ A \cup B = E \Longleftrightarrow \complement_E A \subset B \Longleftrightarrow \complement_E B \subset A$.

Exercice 8

1. Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. À quelle(s) condition(s) peut-on dire que $\{A, B\}$ est une partition de $A \cup B$?
2. La famille $\Big\{ [n, n+1[, n \in \mathbb{Z} \Big\}$ est-elle une partition de $\mathbb{R}$?
3. Donner deux partitions différentes de $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes.

Exercice 9
Soit E et F deux ensembles. Soit E_1, E_2 (resp. F_1, F_2) deux sous ensembles de E (resp. F). Montrer les assertions suivantes :

1. $(E_1 \times F_1) \cap (E_2 \times F_2) = (E_1 \cap E_2) \times (F_1 \cap F_2)$
2. $(E_1 \times F_1) \cup (E_2 \times F_2) \subset (E_1 \cup E_2) \times (F_1 \cup F_2)$
3. Que dire de l'inclusion réciproque ?
   (On pourra poser $E = F = \mathbb{R}, E_1 = [0, 4], E_2 = [0, 1], F_1 = \mathbb{R}_+$ et $F_2 = [-1, 10]$.)

Pour aller plus loin

Exercice 10
Traduire en langage mathématique à l'aide de $\in$ puis de $\subset$ les phrases suivantes :

1. -7 est un entier relatif
2. e est un irrationnel
3. les imaginaires purs forment un sous-ensemble de $\mathbb{C}$

Exercice 11

— A désigne l'ensemble les adhérents d'un club de sports.
— A_1 désigne l'ensemble de ceux qui ont choisi natation.
— A_2 désigne l'ensemble de ceux qui ont choisi musculation.
— A_3 désigne l'ensemble de ceux qui ont choisi footing.
— A_4 désigne l'ensemble des adhérents féminins.

Que signifient les assertions suivantes :

$$A_3 \subset A_2, A_3 \not\subset A_2, A_2 \cap A_4 \neq \emptyset, A_1 \cup A_3 = A \quad (A_1 \cap A_2) \subset A_4.$$

Décrire les ensembles suivants :

$$\complement_A(A_2 \cap A_3), \complement_A(A_1 \cup A_2), P(A_1), P(A_1 \cap A_4), P(A_1 \cup A_4), P(A_1) \cap P(A_4), P(A_1) \cup P(A_4).$$

Exercice 12
Soit E un ensemble. Soit A et B deux sous-ensembles de E. On appelle différence symétrique de A et B et on note $A\Delta B$ l'ensemble défini par $A\Delta B = \big(A \cap \complement_E B\big) \cup \big(B \cap \complement_E A\big)$. Montrer que

1. $A\Delta B = \emptyset \iff A = B$
2. $\big(\complement_E A\big)\, \Delta\, \big(\complement_E B\big) = A\Delta B$

Exercice 13
Soit E un ensemble. Montrer l'assertion suivante :

$$\forall (A, B) \in P(E)^2\,, \quad A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$$

(Indication : On pourra montrer la contraposée)

Exercice 14
Soit E un ensemble. Soit A et B deux sous-ensembles de E. Démontrer les lois de Morgan

1. $\complement_E A \cap \complement_E B = \complement_E(A \cup B)$
2. $\complement_E A \cup \complement_E B = \complement_E(A \cap B)$

Exercice 15
Soit $A, B \subset E$. Résoudre les équations à l'inconnue $X \subset E$

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.