

Une récurrence défailante...

Nous allons "montrer" par récurrence que tout groupe composé d'étudiants de 1A et contenant Léa est uniquement composé de filles.

Soit la propriété P définie $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par

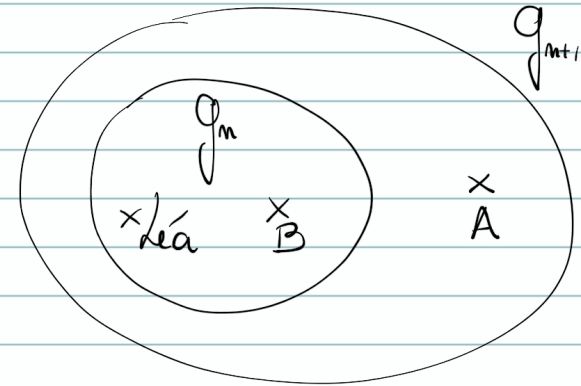
$P(n)$: "tout groupe de n personnes contenant Léa est composé uniquement de filles".

Initialisation: $n=1$,

tout groupe de 1 personne qui contient Léa est en fait Léa toute seule donc il est bien uniquement composé de filles. D'où $P(1)$ vraie.

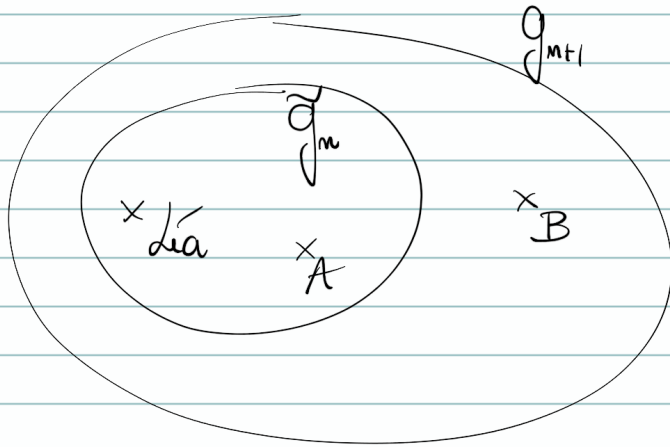
Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie. Soit G_{n+1} un groupe de $n+1$ personnes qui contient Léa.

On appelle A et B deux personnes autres que Léa, et on sort A du groupe pour obtenir un sous-groupe G_n de n personnes qui contient Léa:



G_n contient Léa et est composé de n personnes, donc comme $P(n)$ est vraie, G_n est uniquement composé de filles (a fortiori, B est une fille).

On remet A dans le groupe et on en sort B cette fois-ci, pour obtenir un sous-groupe qu'on appelle G_n :



Toujours d'après $\mathcal{P}(n)$, G_n étant un groupe de n personnes qui contient Léa, il est uniquement composé de filles.

Or B est une fille, on en conclut que $G_{n+1} = G_n \cup \{B\}$ est uniquement composé de filles : $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Finalement, on a montré que

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ vraie
 — et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$
 donc par récurrence, on a montré que tout groupe contenant Léa est uniquement composé de filles.