

79 p 93

$$f: x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin x \times \cos x}{x^2}$$

f est bien définie par $x^2 \neq 0$, i.e $x \neq 0$, i.e sur $\mathbb{R}^*$.

$$1^o) \forall x \in \mathbb{R}^*, -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

la valeur minimale du produit $\sin x \times \cos x$ est donc $(-1) \times 1 = -1$
et sa valeur maximale $(-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$.

$$\text{Donc } -1 \leq \sin x \times \cos x \leq 1$$

Par suite, en divisant chaque membre par $x^2 > 0$:

$$\frac{-1}{x^2} \leq \frac{\sin x \times \cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{-1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2°) γ admet donc en $+\infty$ et $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=0$. (c'est l'axe des abscisses).

93 p 95

Considérons la fonction $f: x \mapsto \cos(2x) + x$.

f est une composée de la fonction cosinus (dérivable sur $\mathbb{R}$) et de fonctions polynômes de degré 1 (dérivables sur $\mathbb{R}$), donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et par suite f est continue sur $\mathbb{R}$.

A priori, f est continue sur $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

$$\text{Or } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\pi) - \frac{\pi}{2} = -1 - \frac{\pi}{2} < -1$$

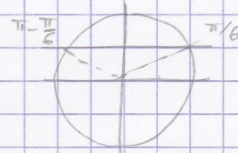
$$\text{et } f(0) = \cos(2 \times 0) + 0 = 1 + 0 = 1 > -1.$$

De plus, sur $[-\frac{\pi}{2}; 0]$, f est dérivable et

$$f'(x) = -2 \sin(2x) + 1.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2 \sin(2x) + 1 > 0 \Leftrightarrow 2 \sin(2x) < 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) < \frac{1}{2}$$

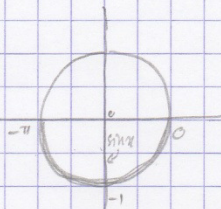


$$\text{Or } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$$

$$-\pi \leq 2x \leq 0$$

$$-1 \leq \sin(2x) \leq 0$$



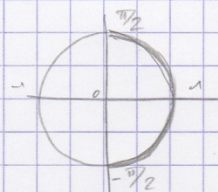
Donc $\cos(2x) \leq \frac{1}{2}$ et par suite $f'(x) > 0$.

f est donc strictement croissante sur cet intervalle, elle est continue, donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $\cos(2x) + x = -1$ admet une solution unique dans $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

104 p 96

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{\cos(x)}$$



1) f est définie si $\cos(x) \geq 0$,

mais $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geq 0$, donc f est bien définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

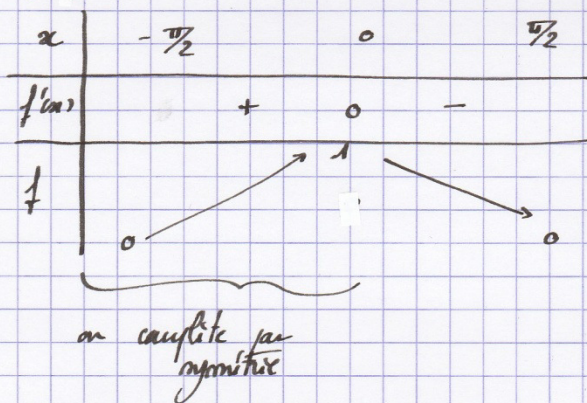
f est dérivable si $\cos(x) > 0$, donc f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \quad f'(x) = \frac{(\cos(x))'}{2\sqrt{\cos(x)}} = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$$

2) On remarque que $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(-x) = \sqrt{\cos(-x)} = \sqrt{\cos(x)} = f(x)$,

donc f est paire et l'on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \sin(x) > 0$ donc $f'(x) < 0$.



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |\cos(x)| + \cos(x).$$

- 1°) f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car cosinus et la valeur absolue sont définies sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car cos et la valeur absolue le sont.
(non dérivable en 0.)

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) &= |\cos(-x)| + \cos(-x) \\ &= |\cos(x)| + \cos(x) = f(x). \end{aligned}$$

|| Donc f est pair, on peut restreindre le domaine d'étude à $\mathbb{R}_+$.

- 2°) Comme cosinus est 2π -périodique, f est au moins 2π -périodique. On cherche des périodes "plus petites" parmi les diviseurs de 2π .

Voyons si f est π -périodique:

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= |\cos(x+\pi)| + \cos(x+\pi) \\ &= |-\cos x| - \cos(x) = |\cos(x)| - \cos(x) \neq f(x) \end{aligned}$$

Donc f est "seulement" 2π -périodique:

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= |\cos(x+2\pi)| + \cos(x+2\pi) \\ &= |\cos(x)| + \cos(x) = f(x). \end{aligned}$$

|| On peut donc restreindre l'étude à $[-\pi; \pi]$, et à $\mathbb{R}_+$, donc à $[0; \pi]$.

- 3°) On a vu que f est définie sur $[0; \pi]$, dérivable sur $]0; \pi[$.

• Dérivabilité en 0 : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\cos(0+h)| - \cos(0)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overset{1}{\cos(h)} - 1}{h} \quad \text{forme indéterminée}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - \cos(0)}{h - 0}, \text{ c'est le nombre}$$

derivé du cosinus en 0, i.e. $-\sin(0) = 0$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

- $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \cos x + \cos x = 2\cos x$ car $\cos x \geq 0$
- $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = -2\sin x \leq 0$ car $\sin x \geq 0$ sur cet intervalle.
- $\forall x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$, $f(x) = -\cos x + \cos x = 0$ car $\cos x \leq 0$
- $\forall x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$, $f'(x) = 0$