

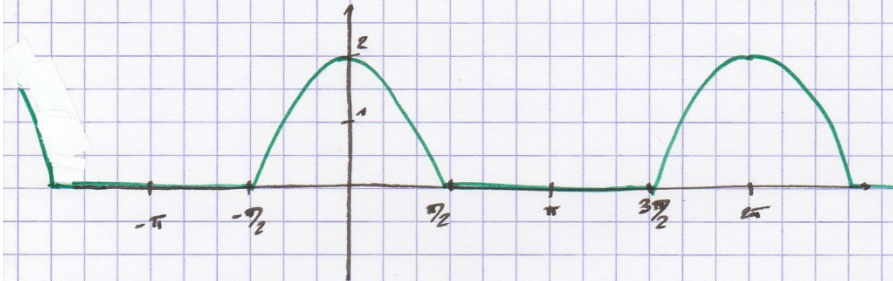
On peut répondre tout cela en faisant ^{4/6} immédiatement deux cas :

• si $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geq 0$, donc

$$f(x) = \cos(x) + \cos(x) = 2\cos x$$

• si $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi]$, $\cos(x) \leq 0$, donc

$$f(x) = -\cos(x) + \cos(x) = 0$$



M2 p 96 Cet exercice est spécialement dédié aux élèves qui oublient de « se servir de la question précédente ».

1°) $\forall x \in [0; +\infty[$, $\sin(x) \leq x$

Soit $f: x \in [0; +\infty[\mapsto f(x) = x - \sin x$

En tant que somme de l'identité et de l'opposée de la fonction sinus, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = 1 - \cos x$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geq 0$ car $1 - \cos x \geq 0$ car $1 \geq \cos x$, ce qui est vrai.

Donc f' est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq f(0)$$

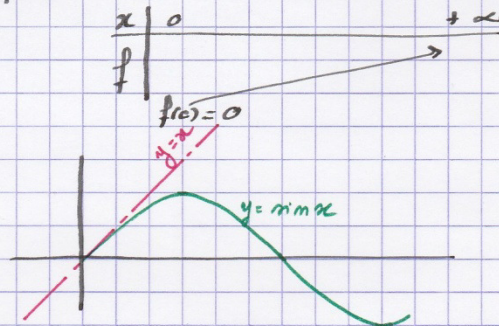
$$\text{car } f(0) = 0 - \sin(0) = 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \sin x \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq \sin x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin x \leq x$$



2°) Nq $\forall x \in [0; +\infty[$; $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$.

On sait que $\forall x \in [0; +\infty[$, $\cos x \leq 1$ par définition des cosinus.

Reste à montrer que $\forall x \in [0; +\infty[$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$
ce que $\forall x \in [0; +\infty[$, $\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$.

Soit $g: x \in [0; +\infty[\mapsto g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de la fonction cosinus et d'un polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = -\sin x + 0 + \frac{2x}{2} = (-\sin x + x) \leftarrow \text{penser à utiliser la question précédente!}$$

Or on a vu à la question 1°) que $\forall x \in \mathbb{R}_+, -\sin x + x \geq 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) \geq 0$.

Donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{Comme } g(0) = \cos(0) - 1 + \frac{0^2}{2} = 1 - 1 + 0 = 0,$$

$$\text{il vient: } \forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq g(0) \text{ i.e. } g(x) \geq 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_+, \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Finalement, } \forall x \in \mathbb{R}_+, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1.$$

$$3^\circ) \text{ Il y a } \forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

On sait d'après 1°) que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin x \leq x$.

$$\text{Montrons que } \forall x \in \mathbb{R}_+, \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$$

$$\text{i.e. } \forall x \in \mathbb{R}_+, \sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0.$$

$$\text{Soit } h: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

En tant que somme d'un polynôme et de la fonction sinus, h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, h'(x) = \cos x - 1 + \frac{3x^2}{6} = (\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}) \leftarrow \text{penser à utiliser la question précédente!}$$

$$\text{Or on a vu au 2°) que } \forall x \in \mathbb{R}_+, h'(x) = g(x) \geq 0.$$

Donc la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}_+$,
et $\forall x \in \mathbb{R}_+, h(x) \geq h(0)$.

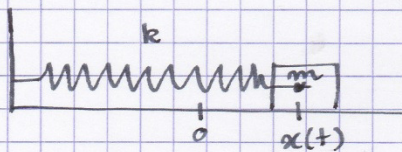
$$\text{Or } h(0) = \sin(0) - 0 + \frac{0^3}{6} = 0 - 0 + 0 = 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_+, h(x) \geq 0 \text{ i.e. } \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

$$\text{On a montré que } \forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

157 p 107.

$$m = 0,2 \text{ kg} ; k = 3,6 \text{ N.m}^{-1}.$$



$$x(t) = 2 \cos(3\sqrt{2}t)$$

$$\text{Il y a } \forall t \geq 0, x''(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0.$$

Comme on est en maths, on précisera qu'en tant que composée de la fonction cosinus, $x(t)$ est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

« dérivable autant de fois que l'on veut »
(on peut calculer $x'(t)$, $x''(t)$, $x'''(t)$, $x^{(4)}(t)$ etc...)

En physique on ne précise habituellement pas ce genre de chose:
« on ça m'éclaire pas, on ne l'étudie pas! » (d'ailleurs mon prof de méca).

$$\forall t \geq 0, \quad x(t) = 2 \cos(3\sqrt{2}t)$$

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad x'(t) &= 2 \times 3\sqrt{2} \times (-\sin(3\sqrt{2}t)) \quad (\text{dérivée d'une fonction composée}) \\ &= -6\sqrt{2} \sin(3\sqrt{2}t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad x''(t) &= (-6\sqrt{2}) \times 3\sqrt{2} \times \cos(3\sqrt{2}t) \\ &= -6 \times 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos(3\sqrt{2}t) \\ &= -36 \cos(3\sqrt{2}t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \forall t \geq 0, \quad x''(t) + \frac{k}{m} x(t) &= -36 \cos(3\sqrt{2}t) + \frac{3,6}{0,2} \times 2 \cos(3\sqrt{2}t) \\ &= -36 \cos(3\sqrt{2}t) + \frac{3,6}{0,1} \cos(3\sqrt{2}t) \\ &= -36 \cos(3\sqrt{2}t) + 36 \cos(3\sqrt{2}t) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{II Donc } \forall t \geq 0, \quad x''(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0. \quad (E).$$

N.B. : L'équation (E) contient des dérivées.

Une telle équation s'appelle une équation différentielle.

—x—