

Ce problème est célèbre, voir l'article Wikipedia à son sujet...

Notant G : le joueur gagne et B : la porte que le joueur avait choisie au départ était la bonne porte,

on applique la formule des probabilités totales, puis celle des probas conditionnelles:

$$(*) \quad P(G) = P(G \cap B) + P(G \cap \bar{B}) = P_B(G) \times P(B) + P_{\bar{B}}(G) \times P(\bar{B})$$

$$\text{car } P_B(G) = \frac{P(G \cap B)}{P(B)} \quad \text{et} \quad P_{\bar{B}}(G) = \frac{P(G \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

- Si le joueur ne change pas de porte: $P_B(G) = 1$ et $P_{\bar{B}}(G) = 0$
Dans (*): $P(G) = 1 \times P(B) + 0 \times P(\bar{B})$, or $P(B) = \frac{1}{3}$
Donc $P(G) = \frac{1}{3}$.

- Si le joueur change de porte: $P_B(G) = 0$ et $P_{\bar{B}}(G) = 1$
Dans (*): $P(G) = 0 \times P(B) + 1 \times P(\bar{B}) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Donc il vaut mieux changer de porte!