Sujet posé par M. Felten

Exercice 1 *Équations bicarrées.*

On se propose de résoudre l'équation :

$$x^4 - 12x^2 + 27 = 0 \quad \textbf{(E)}$$

1. On pose $X = x^2$, exprimer x^4 en fonction de X.
2. Résoudre alors l'équation **(E)**

Avec cette méthode, résoudre l'équation :

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

Exercice 2 On considère l'équation :

$$(E) \quad x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0$$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. On résout à présent (E) sur $\mathbb{R}^*$.
   Montrer que, si α est solution de (E), alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi solution de (E).
3. Montrer que l'équation (E) est équivalente à :
   $$x^2 - 2x - 6 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
4. Pour $x \neq 0$, calculer $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$.
5. En posant $X = x + \dfrac{1}{x}$, montrer que l'équation (E) est équivalente à une équation (E') du second degré et d'inconnue X à déterminer.
6. Résoudre l'équation (E').
7. En déduire les solutions de l'équation (E).