Corrigé.

1°) (*) En tant que fraction rationnelle, f est définie, continue et dérivable, sauf pour les valeurs de x qui annulent son dénominateur.

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2,$$

donc $\mathcal{D}f = \mathbb{R}-\{-2\} =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$\forall x \in \mathcal{D}f,\ \left(\frac{x^2}{x+2}\right)' = \frac{2x(x+2)-x^2\times 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2+4x-x^2}{(x+2)^2}$$ ← garder ici la forme factorisée : c'est un carré, donc positif.

$$= \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x(x+4)}{(x+2)^2} \quad]\oplus$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $x(x+4)$.

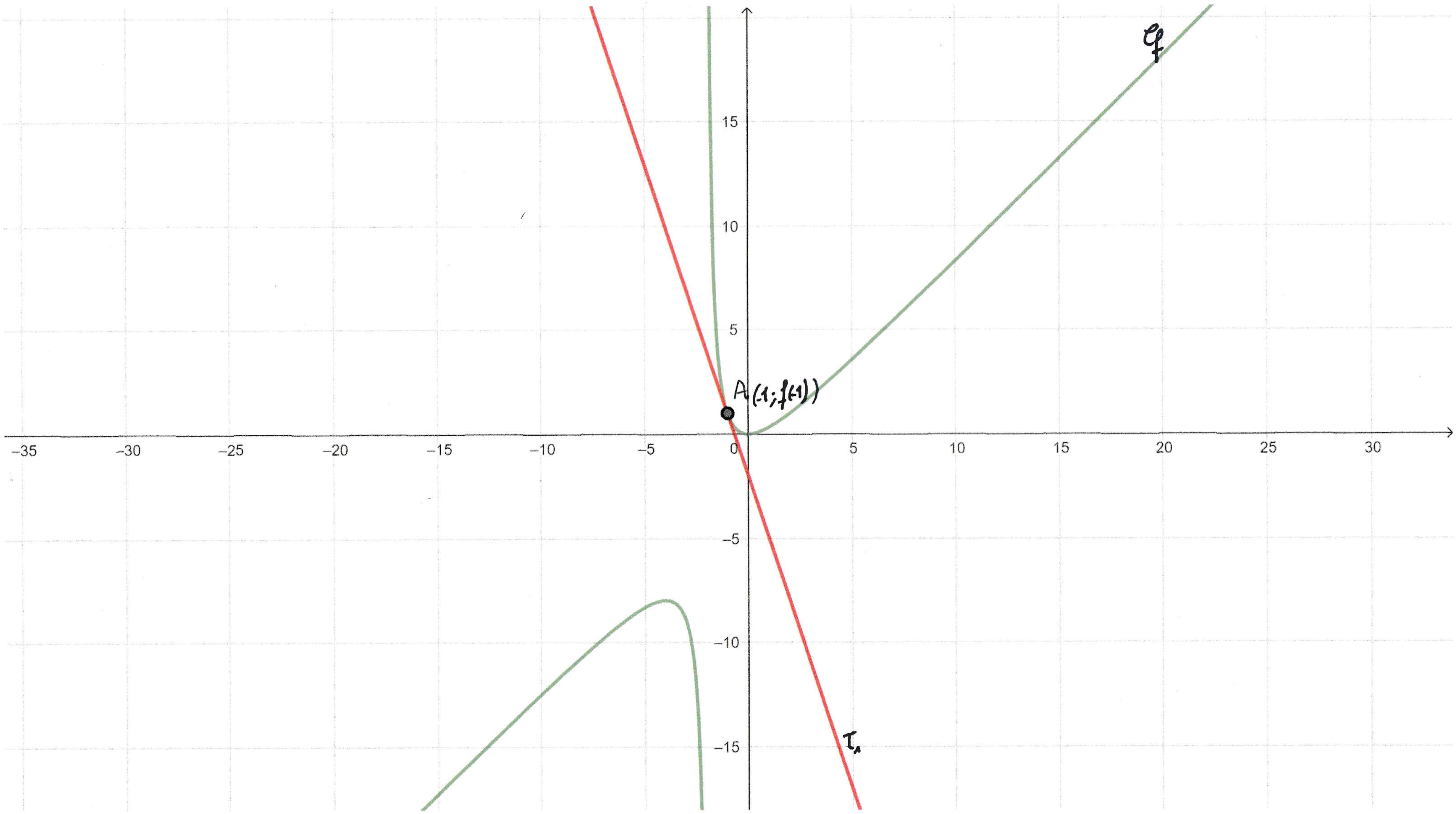
On dresse un tableau de signes, puis un tableau de variations

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-8	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

L'étude complète n'était pas demandée dans le sujet d'origine, je la fais par info.

N.B. : Toujours vérifier en traçant la courbe sur sa calculatrice, si celle-ci est autorisée.

c 2/6



15
10
5
0
−5
−10
−15
−35
−30
−25
−20
−15
−10
−5
5
10
15
20
25
30
A(-1;f(-1))
$\mathcal{C}_f$
T_1

2°) <u>1° méthode</u> $T_{-1} \mid y = mx + p$ (m : pente ; p : ordonnée à l'origine.)

En $x = -1$,

$f'(-1) = \dfrac{(-1)^2 + 6 \times (-1)}{(-1+2)^2} = -3$ (pente m de la tangente)

$f(-1) = 1$

Donc le point A où l'on prend la tangente a pour coordonnées :
$A(-1 ; f(-1))$, i.e. $A(\underbrace{-1}_{x_A} ; \underbrace{1}_{y_A})$.

On a, puisque $f'(-1) = -3$,

$$T_{-1} \mid y = -3x + p$$

On remplace y par y_A et x par x_A pour trouver p :

$$y_A = -3x_A + p$$
$$\Leftrightarrow 1 = -3 \times (-1) + p$$
$$\Leftrightarrow 1 = 3 + p$$
$$\Leftrightarrow p = 1 - 3 = -2$$

Finalement,

$$T_{-1} \mid y = -3x - 2$$

⚠ Il doit rester x et y dans l'équation de la tangente ; c'est une <u>équation de droite</u>, elle doit être de la forme $y = mx + p$.

<u>2° méthode</u> (Que je ne conseille pas, car elle consiste à appliquer bêtement une formule sans trop comprendre ce que l'on fait).

$$T \mid y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

où $f'(a)$ est la dérivée en a,
a étant l'abscisse du point où l'on prend la tangente.
Ici, $f'(a) = f'(-1) = -3$

$f(a)$ est l'image de a (a étant toujours l'abscisse du point où l'on prend la tangente).
Ici, $f(a) = f(-1) = 1$.

$a = -1$

Il vient : $T \mid y = -3\,(x - (-1)) + 1$

$T \mid y = -3x - 3 + 1$

$T \mid y = -3x - 2$

Cette méthode peut paraître séduisante car elle semble plus courte (en réalité la majorité des calculs consiste à calculer $f(a)$ et $f'(a)$, donc les deux méthodes se valent) et permet de travailler "bêtement". Mais il y a toutes les chances que vous confondiez a et x, ainsi que $f(a)$ et $f'(a)$.
Je conseille donc fortement la 1° méthode.

P.S : L'équation de tangente que nous avons trouvé est cohérente d'une part avec la représentation graphique, d'autre part avec la question 3° - c'est bon signe.

3°) Il s'agit d'étudier la différence

$$\underbrace{f(x)}_{\text{"altitude" de la courbe } \mathcal{C}_f} - \underbrace{(-3x-2)}_{\text{"Altitude" de la tangente } T_{-1}}.$$

On va nous faire exprimer cette "différence d'altitude" sous forme factorisée pour pouvoir étudier son signe.
[Proverbe du jour : « Qui dit signe dit factorisation »]

Si $f(x) - T_{-1}(x) > 0$,
alors $f(x) > T_{-1}(x)$, i.e. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T_{-1}
Si $f(x) - T_{-1}(x) < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de T_{-1}.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$,

$$\Delta(x) = f(x) - (-3x-2) = \frac{x^2}{x+2} + 3x + 2$$

Fraction : mettre au même dénominateur

$$= \frac{x^2 + (3x+2)(x+2)}{x+2}$$

$$= \frac{x^2 + 3x^2 + 6x + 2x + 4}{x+2}$$

$$= \frac{4x^2 + 8x + 4}{x+2}$$ ✓

4°) Il s'agit donc ici d'étudier le signe de $\Delta(x)$.
"Qui dit signe dit factorisation", on va donc essayer de factoriser.
Attention à ne pas se précipiter pour calculer Δ, il y a peut-être plus simple que la grosse machinerie des "formules spéciales second degré".
- Mais si vous calculez Δ, x_1, x_2 et factorisez avec $a(x-x_1)(x-x_2)$, c'est brutal mais ça marche.

$$\Delta(x) = f(x) - T_{-1}(x) = \frac{4\,(x^2+2x+1)}{x+2}$$

$$= \frac{4\,(x+1)^2}{x+2} \quad]+ \qquad (\text{pour } x \neq -2)$$

Le numérateur est positif, donc la différence $\Delta(x)$ (écart entre la courbe et sa tangente) est du signe de $x+2$.
Il vient le tableau de signes suivant : $(x+2>0 \Leftrightarrow x>-2)$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$\Delta(x)$	$-$	||	$+$
	$f(x) < (-3x-2)$	||	$f(x) > (-3x-2)$

Sur $]-\infty\,;-2[$, la courbe C_f est en-dessous de la tangente T_{-1}.

Sur $]-\infty\,;-2[$, la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_{-1}. N.B : la courbe est évidemment en contact avec la tangente au point d'abscisse -1.

Ces résultats sont cohérents avec la représentation graphique.