

107p524

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1°) On peut calculer à la main, ou à la calculatrice.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{matrice nulle})$$

donc $\forall n > 3, A^n = 0$ car on multiplie par la matrice nulle.

2°a) $\forall x \in \mathbb{R}, \Pi(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 \quad (R_1).$

$$\Pi(0) = I + 0 \times A + \frac{0^2}{2}A^2 = I + 0 + 0 = I$$

$$B = \Pi(4) = I + 4A + \frac{4^2}{2}A^2 = I + 4A + 8A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2°b) \Pi(x) \times \Pi(y) = \left(I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 \right) \left(I + yA + \frac{y^2}{2}A^2 \right)$$

$$= I + yA + \frac{y^2}{2}A^2 + xA + xyA^2 + \underbrace{x \frac{y^2}{2} A^3}_{0}$$

mul
d'après
la question
1°.

$$+ \frac{x^2}{2}A^2 + \underbrace{y \frac{x^2}{2} A^3}_{0} + \underbrace{\frac{x^2}{2} \frac{y^2}{2} A^4}_{0}$$

$$= I + yA + \frac{y^2}{2}A^2 + xA + xyA^2 + \frac{x^2}{2}A^2$$

$$= I + (x+y)A + \left(\frac{y^2}{2} + xy + \frac{x^2}{2} \right) A^2$$

$$= I + (x+y)A + \left(\frac{1}{2}(x+y)^2 \right) A^2$$

$$= I + (x+y)A + \frac{(x+y)^2}{2} A^2$$

$$= \Pi(x+y)$$

|| Donc $\Pi(x) \times \Pi(y) = \Pi(x+y)$

On peut remarquer que Π "transforme un produit en somme":
et qu'on se "comporte comme" une exponentielle.

$$3°) \Pi(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_I + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{xA} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\frac{x^2}{2}A^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4^{\circ}) \quad \Gamma(x) \times \Gamma(x') \stackrel{2^{\circ}}{=} \Gamma(x+x') \stackrel{3^{\circ}}{=} \begin{pmatrix} 1 & x+x' & (x+x')^2/2 \\ 0 & 1 & x+x' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{SOS/2}$$

Donc $\Gamma(x) \times \Gamma(x') = I$ ssi $x+x'=0$, i.e. $\underline{x' = -x}$

Comme $B = \Gamma(1)$,

$$B \times B' = I \text{ssi} \quad B' = \Gamma(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex SOS. A Binôme de Newton. [Pour s'entraîner voir Sigma: Site/Terminals/Vers le Supérieur/IDG1]

1^o) Soient $A, B \in M_p(\mathbb{R})$ (matrices carrées d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{R}$)
telles que $AB = BA$.

Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k B = B A^k$. (P_k)

Initialisation: Pour $k=0$: $A^0 B = IB = B$, et $BA^0 = B \cdot I = B$.
Donc (P_0) vraie.

Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}$ tq (P_k) soit vraie:

$$A^{k+1} B = A \times A^k B \stackrel{H.R.}{=} A \times B A^k = \underbrace{A \times B}_{\text{or A et B commutent}} \times A^k = B A \times A^k = B A^{k+1}.$$

Donc (P_{k+1}) est vraie.

Conclusion: $\forall k \in \mathbb{N}$, A^k et B commutent. On montrerait de même que A et B^k commutent, et que A^k et $B^{k'}$, $k, k' \in \mathbb{N}$, commutent!

$$2^{\circ}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, (A+B)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^i B^{n-i}, \quad (P_n)$$

$$\text{or } \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (\text{coefficients binomiaux})$$

Initialisation: Pour $n=0$, $(A+B)^0 = I$

$$\text{Or } \sum_{i=0}^0 \binom{0}{i} A^i B^{0-i} = \binom{0}{0} A^0 B^{0-0} = 1 \times I \times I = I.$$

Donc (P_0) est vraie.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ tq (P_n) vraie.

$$\begin{aligned} (A+B)^{n+1} &= (A+B)^n \times (A+B) \\ &\stackrel{H.R.}{=} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^i B^{n-i} \right) \times (A+B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} A^i B^{m-i} \cdot A + \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} A^i B^{m-i} \cdot B \\
 &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} A^i A \cdot B^{m-i} + \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} A^i B^{m-i} \cdot B \\
 &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} A^{i+1} B^{m-i} + \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} A^i B^{(m+1)-i}
 \end{aligned}$$

question 1°

Lemme: $\binom{m+1}{i+1} = \binom{m}{i} + \binom{m}{i+1}$ (le lemme fait partie du cours de preuve sur la loi binomiale)

Preuve: $\binom{m}{i} + \binom{m}{i+1} = \frac{m!}{i! (m-i)!} + \frac{m!}{(i+1)! (m-(i+1))!}$ (*)

on a multiplié numérateur et dénominateur par $i+1$

$$= \frac{m! (i+1)}{(i+1)! (m-i)!} + \frac{m! (m-i)}{(i+1)! (m-i)!}$$

on a multiplié numérateur et dénominateur par $m-i$

ici, on a mis les fractions au même dénominateur pour pouvoir additionner les deux fractions

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m! (i+1) + m! (m-i)}{(i+1)! (m-i)!} \\
 &= \frac{m! (i+1 + m-i)}{(i+1)! (m-i)!} \\
 &= \frac{m! (m+1)}{(i+1)! (m+1-i-1)!} \\
 &= \frac{(m+1)!}{(i+1)! ((m+1)-(i+1))!} \\
 &= \binom{m+1}{i+1}
 \end{aligned}$$

(*) Factorielle n : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$, et $0! = 1$.

Retour à l'exercice; on a:

$$(A+B)^{m+1} = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} A^{i+1} B^{m-i} + \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} A^i B^{(m+1)-i}$$

ICI On pose $j = i+1$, c'est-à-dire $i = j-1$.

$$(A+B)^{m+1} = \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} A^j B^{m-(j-1)}$$

$= m-j+1$
 $= (m+1)-j$

Quand i vaut 0, j vaut donc 1, etc...

$$+ \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} A^j B^{(m+1)-j}$$

ici, on pose juste $j=i$. On a le droit car dans $\sum$ on a une variable muette.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} A^j B^{(m+1)-j} + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} A^j B^{(m+1)-j} \\
&= \sum_{j=1}^m \left[\binom{m}{j-1} + \binom{m}{j} \right] A^j B^{(m+1)-j} + \binom{m}{m+1-1} A^{m+1} B^{(m+1)-(m+1)} \\
&\quad + \binom{m}{0} A^0 B^{(m+1)-0} \\
&\quad \text{d'après le lemme} \qquad \text{terme d'indice } m+1 \text{ du premier } \Sigma \\
&\quad \text{terme d'indice } 0 \text{ du second } \Sigma
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^m \binom{m+1}{j} A^j B^{(m+1)-j} + \underbrace{\binom{m}{m} A^{m+1} B^0}_{=1} + \underbrace{\binom{m}{0} A^0 B^{m+1}}_{=1}$$

$$= A^0 B^{m+1} + \sum_{j=1}^m \binom{m+1}{j} A^j B^{(m+1)-j} + A^{m+1} B^0$$

$$= \underbrace{\binom{m+1}{0} A^0 B^{m+1}}_{=1} + \sum_{j=1}^m \binom{m+1}{j} A^j B^{(m+1)-j} + \underbrace{\binom{m+1}{m+1} A^{m+1} B^0}_{=1}$$

correspond au terme d'indice 0 de ce Σ correspond au terme d'indice $m+1$ de ce Σ

$$= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} A^j B^{(m+1)-j} \quad \text{Donc } (P_{m+1}) \text{ est vraie.}$$

NB : $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! (m-n)!} = \frac{m!}{n! 0!} = \frac{m!}{n!} = 1$, m calcul par $\binom{m+1}{m+1}$

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! (m-0)!} = \frac{m!}{1 \times m!} = \frac{m!}{m!} = 1, \text{ m calcul par } \binom{m+1}{0}$$

Conclusion: on peut appliquer la formule du binôme de Newton, mais seulement à deux matrices qui commutent.