

108 p 584

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1°] $B = A - I_3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que B est une matrice triangulaire (les coefficients non nuls sont dans un triangle déterminé par la diagonale) supérieure (car le triangle qui est au-dessus de la diagonale) stricte (ce triangle ne comprend pas la diagonale, car les coefficients diagonaux sont nuls).

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ (matrice nulle)}$$

2°a] $A^n = (B + I_3)^n$

$B \times I_3 = I_3 \times B$ car la matrice identité commute avec toutes les autres. Comme les deux matrices commutent, d'après l'exercice précédent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

2°b] Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

$$A^n = (B + I_3)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B^i \underbrace{I_3^{n-i}}_{= I_3} \quad \text{(formule du binôme de Newton)}$$

(multiplication "par 1")

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B^i$$

Or $n \geq 3, B^i = 0$ (1° question). Donc:

$$A^n = \sum_{i=0}^2 \binom{n}{i} B^i = \binom{n}{0} \underbrace{B^0}_{= I} + \binom{n}{1} \underbrace{B^1}_{= B} + \binom{n}{2} B^2$$

$$= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$$

Donc $n \geq 3,$

$$A^n = \frac{n!}{0! n!} I_3 + \frac{n!}{1! (n-1)!} B + \frac{n!}{2! (n-2)!} B^2$$

$$= 1 \times I_3 + n \times B + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

$n \geq 3$

$$A^n = I_3 + n B + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

SOS/6

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{m(m-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & m & m + \frac{m(m-1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ si } m + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{2m + m^2 - m}{2} = \frac{m+m^2}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & m & \frac{m(m+1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2°] Pour $m=0$, la formule ci-dessus donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$,
ce qui est égal à A^0 .

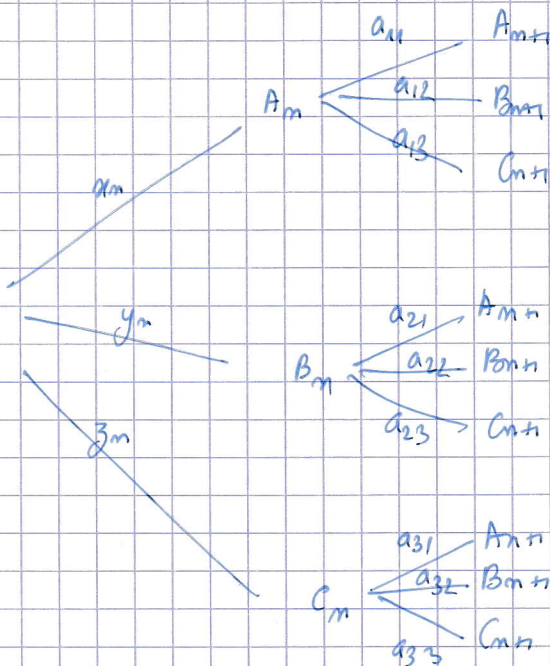
Pour $m=1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$
donc la formule est valable.

Pour $m=2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2$,
donc la formule est valable.

Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N}$, notre formule est valable.

SOS. B

1°]



2°]

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2°) $U_m = (x_m \ y_m \ z_m)$, $U_0 = (x_0 \ y_0 \ z_0)$
 $U_{m+1} = (a_{m+1} \ y_{m+1} \ g_{m+1})$.

On applique les probabilités totales à l'autre précédent :

$x_{m+1} = a_{11} x_m + a_{21} y_m + a_{31} z_m$, de même pour y_{m+1} et z_{m+1}

d'où $U_{m+1} = U_m \times T$.
Non , on ne peut pas "juste dire" que c'est une "suite géométrique". Vous disposez

2°) On a $U_{m+1} = U_m \times T$ des suites de nombres, mais n'avez pas défini les (P_m) suites de matrices en classe.
 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times T^n$

Initialisation : $U_0 \times T^0 = U_0 \times I = U_0$, (P_0) vraie.

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$ tq (P_m) vraie.

$$\begin{aligned} U_{m+1} &= U_m \times T \\ &\stackrel{H.P.}{=} U_0 \times \underbrace{T^m \times T}_{} \\ &= U_0 \times T^{m+1} \end{aligned}$$

donc (P_{m+1}) est vraie.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times T^n$.

Vous n'avez pas fait (et ne ferez pas cette année) de cours sur les suites de matrices.

Donc à chaque fois que vous voudrez appliquer à des matrices un "résultat de cours" concernant les suites, vous serez obligé de le redémontrer.

C'est ce qui est attendu par le jury, et cela vaut beaucoup de points!