

109p524

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = N + D$$

avec :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{matrice diagonale})$$

$$1^\circ) \quad ND = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \left| \quad DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

Donc $ND = DN$

$$2^\circ) \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \forall p \geq 2, \quad N^p = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3^\circ) \quad \forall m \geq 2, \quad A^m = (N+D)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} N^k D^{m-k}$$

On peut bien utiliser la formule du binôme de Newton, puisque les matrices N et D commutent.

$$A^m \stackrel{(2^\circ)}{=} \underbrace{\binom{m}{0} N^0 D^m}_{k=0} + \underbrace{\binom{m}{1} N^1 D^{m-1}}_{k=1}$$

(D'après le 1°, les puissances successives de N sont nulles, donc les autres termes sont nuls).

$$A^m = 1 \cdot I D^m + m N D^{m-1}$$

$$= D^m + m N D^{m-1}$$

4°) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$D^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix} \quad (\text{matrice diagonale})$$

$$\text{Donc } A^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix} + m N \underbrace{\begin{pmatrix} 2^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{m-1} \end{pmatrix}}_{ND^{m-1}}$$

$$N D^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc, en sautant (voir page précédente),

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

5°) Pour $n=0$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0 \quad \checkmark$

Pour $n=1$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A = A^1 \quad \checkmark$

Donc cette expression reste valable.

III p 584

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

1°) $A^5 = \begin{pmatrix} -0,96 & -0,97 \\ 1,96 & 1,97 \end{pmatrix}; \quad A^8 = \begin{pmatrix} -0,992 & -0,996 \\ 1,992 & 1,996 \end{pmatrix}; \quad A^{10} = \begin{pmatrix} -0,99 & -0,99 \\ 1,99 & 1,99 \end{pmatrix}$

Il semble que quand n tend vers $+\infty$, A^n tende vers $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

2°) $AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ 2 & -0,5 \end{pmatrix}$ $PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -0,5 \end{pmatrix}$

Donc $AP = PD$.

3°) $\det P = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$, donc P est inversible.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 4^{\circ}) \quad AP = PD &\Leftrightarrow \underbrace{APD^{-1}}_{AI} = PDP^{-1} \\
 &\Leftrightarrow AI = PDP^{-1} \\
 &\Leftrightarrow A = PDP^{-1}
 \end{aligned}$$

Initialisation: pour $n=0$, $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$, et $A^0 = I$, (P_n) v.a.

$$\begin{aligned}
 \text{Hérédité: } A^{n+1} &= A \times A^n \stackrel{\text{H.R.}}{=} \underbrace{A \times PD^n P^{-1}}_{\stackrel{2^{\circ}}{=} PD^{n+1}P^{-1}} \\
 &= PD^{n+1}P^{-1}, \text{ donc } (P_n) \text{ v.a.}
 \end{aligned}$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^n P^{-1}$.

$$\begin{aligned}
 5^{\circ}) \quad A^n &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 + 2 \times 0,5^n & -1 + 0,5^n \\ 2 + 2 \times 0,5^n & 2 + 0,5^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

6^{\circ}) D'après le cours sur les suites géométriques, comme $-1 < 0,5 < 1$,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$

Donc, par passage à la limite et par somme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ce qui confirme la conjecture émise au 1^{\circ}).

⚠ on n'a toujours pas de P.T.S de cours sur les suites de matrices, il faut fait d'attention!

S05C

$$U_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -0,25 & -0,25 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n + B.$$

$$\begin{aligned}
 1^{\circ}) \quad X &= \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix} \quad AX = \begin{pmatrix} +2+3 = +5 \\ -12-12 = -24 \end{pmatrix} \\
 AX+B &= \begin{pmatrix} 5-13 \\ -24+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix} = X
 \end{aligned}$$

Donc $AX+B = X$.

N.B. : Pour ceux qui commencent, si on considère l'application

$$\Phi: M \mapsto AM + B,$$

on a montré que X est un point fixe par Φ .

2°) Soit $V_n = U_n - X$, pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) Ne pas faire systématiquement une récurrence!

$n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = U_{n+1} - X$ Pense à utiliser la question précédente!

$$\begin{aligned}
 &= A U_n + B - (A X + B) \\
 &= A U_n - A X + \cancel{B} - \cancel{B} \\
 &= A (U_n - X) \\
 &= A V_n
 \end{aligned}$$

(b) Par $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$.

Non, on ne peut pas dire "Bin forcément, on que c'est une suite géométrique", car on n'a pas de cours sur les suites de matrices : il faut tout redémontrer!

Ici oui, il peut faire une récurrence.

Initialisation: Pour $n=0$, $A^0 V_0 = I V_0 = V_0$, donc (P_0) vraie.

Hérédité: Supposons (P_n) vraie.

$$A^{n+1} V_0 = A \cdot \underbrace{A^n V_0}_{(P_n)} \stackrel{H.R.}{=} A \cdot V_n \stackrel{(2a)}{=} V_{n+1}, (P_{n+1}) \text{ vraie.}$$

Donc $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$.

a) Pardon! le a) est après, j'ai écrit... :-/

3°) b) D'après le cours sur les suites géométriques, comme $-1 < 0,25 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,25^n = 0$.

De la même manière, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$.

Par produit puis par somme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \begin{pmatrix} 18 \times 0 + 20 \times 0 \\ 18 \times 0 + 20 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $V_n = \begin{pmatrix} 18 [3 \times 0,25^n - 2 \times 0,5^n] + 20 [0,25^n - 0,5^n] \\ 18 [6 \times 0,5^n - 6 \times 0,25^n] + 20 [-2 \times 0,25^n + 3 \times 0,5^n] \end{pmatrix}$

(on peut aller plus loin, ce qui nous intéresse, c'est la limite!)

S05.D

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n + B$$

$$1^{\circ}) \text{ On pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1/3 a + 2/3 b \\ 1/2 a + 1/2 b \end{pmatrix}$$

$$AX + B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} a + \frac{2}{3} b + 4 \\ \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + 3 \end{pmatrix}$$

$$AX + B = X \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} a + \frac{2}{3} b + 4 = a \\ \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + 3 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 12 = 3a \\ a + b + 6 = 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2b + 12 \\ a = b - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 6 \\ a = b - 6 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre, il vient $0 = 12$, impossible.

Donc une telle matrice X n'existe pas.

$$2^{\circ}) \text{ Par } \forall n \in \mathbb{N}^+, U_n = A^n U_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k \right) B$$

Initialisation: Pour $n=1$,

$$A^1 U_0 + A^0 B = A U_0 + I B = A U_0 + B = U_1$$

Hérédité: Supposons de par un certain $n \in \mathbb{N}^+$, $U_n = A^n U_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k \right) B$. (P_n).

$$U_{n+1} = A U_n + B$$

$$\stackrel{\text{h.r.}}{=} A \left(A^n U_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k \right) B \right) + B$$

$$= A^{n+1} U_0 + A \sum_{k=0}^{n-1} A^k B + B$$

$$= A^{n+1} U_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1} B + B$$

$$= A^{n+1} U_0 + \sum_{i=1}^{n+1} A^i B + B$$

$$= A^{n+1} U_0 + \sum_{i=1}^{n+1} A^i B + A^0 B$$

forme d'indice 0

Si vous avez des difficultés avec $\sum$ voir site Terminale/Vous le Supérieur / TDA.