

$$= A^{m+1} u_0 + \sum_{i=0}^m A^i B$$

Donc (P_m) est vraie.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = A^n u_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k \right) B$.

3°) D'après le cours sur les suites géométriques,

$$-1 < -\frac{1}{6} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0.$$

Donc par produit et par somme,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} A^n &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3+4 \times 0 & 4-4 \times 0 \\ 3-3 \times 0 & 4+3 \times 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/7 & 4/7 \\ 3/7 & 4/7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n u_0 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \left[3 + 4 \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right] + 3 \left[4 - 4 \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right] \\ 5 \left[3 - 3 \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right] + 3 \left[4 + 3 \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right] \end{pmatrix}$$

$$A^k B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \left[3 + 4 \left(-\frac{1}{6}\right)^k \right] + 3 \left[4 - 4 \left(-\frac{1}{6}\right)^k \right] \\ 4 \left[3 - 3 \left(-\frac{1}{6}\right)^k \right] + 3 \left[4 + 3 \left(-\frac{1}{6}\right)^k \right] \end{pmatrix}$$

$$u_n = A^n u_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k \right) B = A^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (A^k B)$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \left[3 + 4 \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right] + 3 \left[4 - 4 \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right] + \sum_{k=0}^{n-1} \left(4 \left[3 + 4 \left(-\frac{1}{6}\right)^k \right] + 3 \left[4 - 4 \left(-\frac{1}{6}\right)^k \right] \right) \\ 5 \left[3 - 3 \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right] + 3 \left[4 + 3 \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right] + \sum_{k=0}^{n-1} \left(4 \left[3 - 3 \left(-\frac{1}{6}\right)^k \right] + 3 \left[4 + 3 \left(-\frac{1}{6}\right)^k \right] \right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 15 + 20 \left(-\frac{1}{6}\right)^n + 12 - 12 \left(-\frac{1}{6}\right)^n + 12n + 16 \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{6}\right)^k + 12n - 12 \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{6}\right)^k \\ 15 - 15 \left(-\frac{1}{6}\right)^n + 12 + 9 \left(-\frac{1}{6}\right)^n + 12n - 12 \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{6}\right)^k + 12n + 9 \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{6}\right)^k \end{pmatrix}$$

$$U_n = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 27 + 24n + 8 \left(-\frac{1}{6}\right)^n + 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{6}\right)^k \\ 27 + 24n - 6 \left(-\frac{1}{6}\right)^n - 3 \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{6}\right)^k \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{6}\right)^k = \frac{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n}{7/6}$$

$$= \frac{6}{7} \left[1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right] \rightarrow \frac{6}{7}$$

ou (suite géométrique) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 27 + \infty + 0 + 4 \times \frac{6}{7} \\ 27 + \infty - 0 - 3 \times \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\infty \\ +\infty \end{pmatrix} \text{ pour la suite}$$

Donc la suite (U_n) dérage.

ML p 525

$$\begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 0 & (1) \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n & (2) \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n & (3) \end{cases}$$

Partie I

1°) Rq $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n = 1$.

Pour $n=0, a_0 + b_0 = 1$ Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $a_n + b_n = 1$ (P_n)

Rq $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n = a_n + b_n = 1, \text{ donc } (P_{n+1}) \text{ vraie.}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n + b_n = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 1 - a_n$.

2°) Dans (1), il vient $\forall n \in \mathbb{N},$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_n$$

$$a_{n+1} = -\frac{1}{6}a_n + \frac{1}{2} \quad (4)$$

Pense à utiliser la question précédente!

3°a) $U_n = a_n - \frac{3}{7}$

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = a_{n+1} - \frac{3}{7}$

$$\stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{6}a_n + \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}a_n + \frac{1}{14}$$

$$u_{mn} = -\frac{1}{6} \left[a_n - \frac{6}{11} \right]$$

SOS/15

$$= -\frac{1}{6} \left[a_n - \frac{3}{7} \right]$$

|| Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{6} u_n$

(u_n) est géométrique de raison $(-1/6)$, et de premier terme $u_0 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.

3°b) En fait que suite géométrique, $u_n = \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$

Donc $a_n = u_n + \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{3}{7}$

$$b_n = 1 - a_n = 1 - \frac{4}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^n - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^n = \frac{4}{7} \left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right)$$

Partie II

1°) $u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$$u_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{2} b_n \\ \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{2} b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Donc $\Pi = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}$

2°) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \Pi^n u_0 \cdot (P_n)$ (Non, on ne peut pas dire "bon premier" juste car une suite géométrique)

Démonstration: Pour $n=0$,

$$\Pi^0 u_0 = I u_0 = u_0, \text{ donc } (P_0) \text{ vraie.}$$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ tq (P_n) vraie.

$$u_{n+1} = \Pi u_n \stackrel{H.P.}{=} \Pi \times \Pi^n u_0 = \Pi^{n+1} u_0, \text{ donc } (P_{n+1}) \text{ vraie.}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \Pi^n u_0$.

3°) $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\det P = 3 + 4 = 7 \neq 0$ donc P est inversible.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ -4/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$$4.) \quad P^{-1} \Pi P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/6 \end{pmatrix} = D, \text{ diagonale.}$$

$$\begin{aligned} 5.) \quad P^{-1} \Pi P = D &\Rightarrow \underbrace{P P^{-1}} \Pi \underbrace{P P^{-1}} = \underbrace{P D P^{-1}} \\ &\Rightarrow I \Pi I = P D P^{-1} \\ &\Rightarrow \Pi = P D P^{-1} \quad (*) \end{aligned}$$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \Pi^n = P D^n P^{-1}$.

Initialisation: pour $n=0$, $\Pi^0 = I$ et $D^0 = I$, donc $P D^0 P^{-1} = P I P^{-1} = P P^{-1} = I$, donc (P_0) vér.

Hérédité: Supposons (P_n) vér.

$$\begin{aligned} \Pi^{n+1} &= \Pi \times \Pi^n \stackrel{H.R.}{=} \Pi \times P D^n P^{-1} \\ &\stackrel{(*)}{=} \underbrace{P D P^{-1}} \times P D^n P^{-1} \\ &= P D I D^n P^{-1} \\ &= P D D^n P^{-1} \\ &= P D^{n+1} P^{-1} \quad \text{donc } (P_{n+1}) \text{ vér.} \end{aligned}$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, \Pi^n = P D^n P^{-1}$

Il est beaucoup plus facile de calculer la puissance n-ème d'une matrice diagonale que d'une matrice carrée "nabale"!.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \Pi^n = P D^n P^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/6)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{4}{2} \left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{4}{2} - \frac{4}{2} \left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{4}{2} + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pu (suite géométrique) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0$

Donc quand n tend vers $+\infty$, Π^n tend vers $\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 4/2 & 4/2 \end{pmatrix}$

Pu suite, comme $U_n = \Pi^n U_0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 4/2 & 4/2 \end{pmatrix} U_0 = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 4/2 & 4/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 4/2 \end{pmatrix}$$

|| Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{4}{2}$.