

118 p 526

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

1a) $F_0 = 1, F_1 = 1$

$$F_2 = 2; F_3 = 3; F_4 = 5; F_5 = 8; F_6 = 13; F_7 = 21; F_8 = 34; F_9 = 55.$$

1b) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$

Pq $U_{n+1} = A U_n$, avec A matrice carrée d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} &= \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 F_{n+1} + 1 F_n \\ 1 F_{n+1} + 0 F_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times U_n. \end{aligned}$$

1c) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. [P₀]

Initialisation: Par $n=0$,

$$A^0 U_0 = I U_0 = U_0, \text{ donc } [P_0] \text{ est vraie.}$$

Hérédité: Soit $m \in \mathbb{N}$ tq $U_m = A^m U_0$.

Par $m+1$, il vient: $U_{m+1} \stackrel{(1b)}{=} A U_m$

$$\stackrel{\text{H.R.}}{=} A \times A^m U_0$$

$$= A^{m+1} U_0, \text{ donc } [P_{m+1}] \text{ vraie.}$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.

A il fallait redimensionner cette relation! on ne pouvait pas l'admettre au motif que « c'est une suite géométrique ».

2.) Diagonalisation de A - Explications (hors programme).

- le mot ps grave si vous ne comprenez pas tout, c'est hors programme (pour les "geeks") -
des matrices peuvent aussi être vues (et c'est la vision des choses la plus mathématiquement exacte par rapport à ce que vous ferez dans prochain) comme représentant des applications linéaires.

C'est à dire: Je prends un vecteur $V \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, i.e. une matrice colonne, et je lui associe un vecteur $V' \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ tq $V' = A.V$.

A représente l'application linéaire:

$$A: V \mapsto V' = A.V.$$

facultatif
hors programme

Il y a des cas particuliers, certains vecteurs v_α dont l'image par A est "un multiple d'eux-mêmes".

C'est-à-dire que pour ces vecteurs v_α , il existe une constante (un nombre réel, puisque l'on travaille dans $\mathbb{R}$) α telle que

$$v_\alpha \longmapsto A \cdot v_\alpha = \alpha v_\alpha$$

l'image par A de v_α est un "multiple" de v_α .

Une telle constante α s'appelle une **valeur propre** de A .

α est appelée **valeur propre** de A ssi il existe un au moins vecteurs v_α (non nuls) tels que

$$A \cdot v_\alpha = \alpha v_\alpha$$

Si l'on a trouvé une valeur propre α , les vecteurs v_α tels que $A \cdot v_\alpha = \alpha v_\alpha$ sont appelés **vecteurs propres associés à la valeur propre α** .

Une matrice est **diagonalisable** (i.e. au prix d'un changement de base, on peut l'écrire comme une matrice diagonale) ssi il existe dans l'espace dans lequel on travaille, une **base formée uniquement de vecteurs propres** de A .

En effet, dans cette base, si on écrit A , on obtient:

(On note cette base v_1, v_2, v_3, v_4 , et on note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les valeurs propres correspondant à ces vecteurs propres; ces valeurs propres ne sont pas forcément toutes distinctes).

$$A = \begin{pmatrix} Av_1 & Av_2 & Av_3 & Av_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\quad}_{\text{matrice diagonale}}$$

$$A v_1 = \lambda_1 \cdot v_1$$

$$A v_2 = \lambda_2 \cdot v_2$$

$$A \cdot v_4 = \lambda_4 v_4$$

$$A \cdot v_3 = \lambda_3 v_3$$

L'intérêt d'avoir une matrice diagonale est, par exemple, de pouvoir la mettre facilement à la puissance n .

2.a) Si on a la "bonne" valeur propre λ qui satisfait $AV = \lambda V$ signifie que λ est une valeur propre de A , et que V est un vecteur propre associé à la valeur propre λ .

• Par $AV = \lambda V \Leftrightarrow (A - \lambda I_2) V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On est en dimension 2, donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout vecteur donné V ,

$$\begin{aligned} AV = \lambda V &\Leftrightarrow AV - \lambda V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AV - \lambda I_2 V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I_2) V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Revenons au problème et supposons $(A - \lambda I_2)$ inversible.

Notons $(A - \lambda I_2)^{-1}$ son inverse.

Il vient:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_2) V &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{(A - \lambda I_2)^{-1} (A - \lambda I_2)}_{I_2} V = (A - \lambda I_2)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow I_2 V = \underbrace{(A - \lambda I_2)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Ce qui est exclu car par hypothèse V est non nul.

|| Donc $(A - \lambda I_2)$ ne doit pas être inversible.

C'est-à-dire que l'on doit avoir $\det(A - \lambda I_2) \neq 0$

2.b) $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

(la matrice A a été déterminée à la question 1.b).

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 \times 1$$

$$= -\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 \quad (*)$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$$

On a deux racines réelles: $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

A admet donc deux valeurs propres:

$$\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2.c) Maintenant que l'on a trouvé les deux valeurs propres, on cherche les vecteurs propres correspondants.

Déterminons V tel que $AV = \lambda V$, avec $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (V non nul).

$$\text{Soit } V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$AV = \lambda V \text{ s'écrit: } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

Ceci équivaut au système:

$$\begin{cases} x + y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda y + y = \lambda(\lambda y) \\ x = \lambda y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda y + y = \lambda^2 y \\ x = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \\ x = \lambda y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ et } x = \lambda y = 0, \text{ exclu car un vecteur propre doit être non nul} \\ \text{ou } \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \text{ et } x = \lambda y. \end{cases}$$

Par définition de λ
comme l'une des solutions de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

$$\Leftrightarrow x = \lambda y$$

Ainsi, V est un vecteur de la forme $V = \begin{pmatrix} \lambda y \\ y \end{pmatrix}$, et tous les vecteurs de cette forme sont des vecteurs propres associés à la valeur propre λ .

On prend par exemple (puisque c'est simple) le vecteur propre

$$V = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{i.e. } y = 1).$$

Déterminons W non nul tel que $A.W = \mu W$.

C'est la même démarche: on obtient le système

$$\begin{cases} x + y = \mu x \\ x = \mu y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu y + y = \mu^2 y \\ x = \mu y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu^2 - \mu - 1 = 0 \text{ (ici)} \\ [y = 0 \text{ est exclu car } W \neq 0] \\ x = \mu y \end{cases}$$