

Donc pour de la forme $w \begin{pmatrix} \mu \\ y \end{pmatrix}$, on prend par exemple:

$$w \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, $v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

$w \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre μ .

La base $(v; w)$ est une base de vecteurs propres, dans laquelle la matrice A sera diagonale.

N.B.: On a bien une base car $\det(v; w) \neq 0$

$$\text{En effet } \det(v; w) = \begin{vmatrix} 1 & \mu \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \mu \neq 0 \text{ car } 1 \neq \mu.$$

2d) On note D la matrice diagonale cherchée et P la matrice de passage qui permet de passer de base par sa place dans notre base de vecteurs propres.

On a $A = P D P^{-1}$ (Voir ex 11p524 + cours Chap. 5.6)

Pour la matrice de passage de la base "habituelle" (dite base canonique) à notre base de vecteurs propres, elle se forme en écrivant simplement les vecteurs propres (vecteurs-colonne) côte-à-côte ainsi:

$$P = \begin{pmatrix} \overset{v}{1} & \overset{w}{\mu} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ elle est inversible } (\det P = 1 - \mu \neq 0)$$

On peut (Cours Rd 4.5) calculer l'inverse de P :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \mu} \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, calculons $P^{-1} A P$.

Normalement, on doit trouver $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, matrice diagonale.

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda+1 & \mu+1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{\lambda-\mu} \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda+1 & \mu+1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda-\mu} \begin{pmatrix} \lambda+1-\mu\lambda & \mu+1-\mu^2 \\ -\lambda-1+\lambda^2 & -\mu-1+\lambda\mu \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda-\mu} \begin{pmatrix} \lambda+1-\mu\lambda & \underbrace{-\mu^2+\mu+1}_{=0} \\ \underbrace{\lambda^2-\lambda-1}_{=0} & -\mu-1+\lambda\mu \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } \lambda\mu = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{4} = \frac{1^2 - \sqrt{5}^2}{4} \\ = \frac{1-5}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\text{Donc } \lambda+1-\mu\lambda = \lambda+1-(-1) = \lambda+2 \\ -\mu-1+\lambda\mu = -\mu-1-1 = -\mu-2$$

Donc, en multipliant chaque coefficient de la matrice par le coefficient

$\frac{1}{\lambda-\mu}$ qui la précède:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+2}{\lambda-\mu} & 0 \\ 0 & \frac{-\mu-2}{\lambda-\mu} \end{pmatrix}$$

Il faut ici se souvenir que λ et μ sont les solutions de l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

donc:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$-\mu^2 + \mu + 1 = -(\mu^2 - \mu - 1) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{On } 1-\mu &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
 &= \frac{1-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{5}}{2} \\
 &= \frac{-2\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } \frac{1+2}{1-\mu} &= \frac{1}{-\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2 \right) = -\frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}+4}{2} \right) \\
 &= -\frac{1}{10} \left(5 - \sqrt{5} + 4\sqrt{5} \right) \\
 &= -\frac{1}{10} \left(5\sqrt{5} - 5 \right) \\
 &= -\frac{5\sqrt{5}-5}{10} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \boxed{1}
 \end{aligned}$$

De la même manière :

$$\begin{aligned}
 \frac{-\mu-2}{1-\mu} &= \frac{1}{-\sqrt{5}} \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 2 \right) \\
 &= +\frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 \right) \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}+4}{2} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{10} (5+\sqrt{5}) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\
 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \boxed{\mu}
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

ce qui est bien la matrice diagonale attendue.

2.e) La forme de la question appelle une démonstration par récurrence.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P D^n P^{-1}$ [P_n].

Initialisation : Pour $n=0$, $A^0 = I$ et $P D^0 P^{-1} = P I P^{-1} = P P^{-1} = I$, donc [P₀] est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $A^n = P D^n P^{-1}$

$$A^{n+1} = A \cdot A^n \stackrel{H.P.}{=} A \cdot P D^n P^{-1}$$

$$\stackrel{2d}{=} \underbrace{P D P^{-1}}_A \cdot P D^n P^{-1}$$

$$= P \underbrace{D \cdot I \cdot D^n}_{D^{n+1}} P^{-1}$$

$$= P D^{n+1} P^{-1} \quad \text{donc } [P_{n+1}] \text{ vraie.}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P D^n P^{-1}$.

2.f) La puissance n -ième d'une matrice diagonale est beaucoup plus facile à calculer! On utilise la Prop 5.1 du cours et donc:

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} d & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{d-\mu} & \frac{-\mu}{d-\mu} \\ \frac{-1}{d-\mu} & \frac{d}{d-\mu} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & \mu^{n+1} \\ \lambda^n & \mu^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{d-\mu} & \frac{-\mu}{d-\mu} \\ \frac{-1}{d-\mu} & \frac{d}{d-\mu} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\lambda^{n+1}}{d-\mu} - \frac{\mu^{n+1}}{d-\mu} & \frac{-\mu \lambda^{n+1}}{d-\mu} + \frac{d \mu^{n+1}}{d-\mu} \\ \frac{\lambda^n}{d-\mu} - \frac{\mu^n}{d-\mu} & \frac{-\mu \lambda^n}{d-\mu} + \frac{d \mu^n}{d-\mu} \end{pmatrix}$$