

$$A^m = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^{m+1} - \mu^{m+1}}{\lambda - \mu} & \frac{-\mu \lambda^{m+1} + \lambda \mu^{m+1}}{\lambda - \mu} \\ \frac{\lambda^m - \mu^m}{\lambda - \mu} & \frac{-\mu \lambda^m + \lambda \mu^m}{\lambda - \mu} \end{pmatrix}$$

3^a) On a vu à la question de que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

Or $U_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$

Comme $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$U_m = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^{m+1} - \mu^{m+1}}{\lambda - \mu} + \frac{-\mu \lambda^{m+1} + \lambda \mu^{m+1}}{\lambda - \mu} \\ \frac{\lambda^m - \mu^m}{\lambda - \mu} + \frac{-\mu \lambda^m + \lambda \mu^m}{\lambda - \mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+1} \\ F_m \end{pmatrix}$$

Donc

$$F_m = \frac{\lambda^m - \mu^m}{\lambda - \mu} + \frac{-\mu \lambda^m + \lambda \mu^m}{\lambda - \mu}$$

$$= \frac{\lambda^m - \mu^m - \mu \lambda^m + \lambda \mu^m}{\lambda - \mu}$$

$$= \frac{(1 - \mu) \lambda^m + (\lambda - 1) \mu^m}{\lambda - \mu}$$

$$= \left(\frac{1 - \mu}{\lambda - \mu} \right) \lambda^m + \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda - \mu} \right) \mu^m$$

$$= \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda - \mu} \right) \mu^m + \left(\frac{1 - \mu}{\lambda - \mu} \right) \lambda^m$$

(*)

on $\mu = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ et $\lambda = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$

$$\frac{1-\mu}{1-\mu} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1}{-\sqrt{5}}$$

(On a vu au 2d que $1-\mu = -\sqrt{5}$, page 505/23)

$$= \frac{\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}}{-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{5}}{(2\sqrt{5})\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}^2}{2 \times \sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{5} + 5}{2 \times 5} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} \frac{1-\mu}{1-\mu} &= \frac{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{-\sqrt{5}} = \frac{\frac{2-1-\sqrt{5}}{2}}{-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{5-\sqrt{5}}{2 \times 5} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

Finalement, en injectant ces valeurs dans (*) il vient :

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \text{ qui est l'égalité demandée.}$$

3.b) Pour $n=2$, il vient

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{1^2 + 2\sqrt{5} + 5}{4} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \times \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} \\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{6+2\sqrt{5}}{4} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \times \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{1}{40} \left(30 + 10\sqrt{5} + 6\sqrt{5} + 10 + 30 - 10\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 10 \right) \\ &= \frac{80}{40} = 2, \text{ ce qui est exact.} \end{aligned}$$

On vérifie de même que $F_3 = 3$ (faire le calcul, il n'est pas difficile).

3c) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Or:
$$\frac{5+\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5} + \sqrt{5} \times 1}{\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{5-\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5} - \sqrt{5} \times 1}{\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Dans l'expression de F_n , il vient:

$$\begin{aligned} F_n &= \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} - \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \end{aligned}$$

Or $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, donc, d'après le cours sur les suites géométriques,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} = +\infty$$

Et $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$, donc, d'après le cours sur les suites géométriques,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} = 0.$$

Par somme,
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] = +\infty$$

|| Par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = +\infty$.

En particulier, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$,

||
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\mu^{n+1} - \lambda^{n+1} \right]$$

3 d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \neq 0$ et on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}} (\mu^{n+2} - \lambda^{n+2})}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}} (\mu^{n+1} - \lambda^{n+1})} \\ &= \frac{\mu^{n+2} - \lambda^{n+2}}{\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}} \\ &= \frac{\mu^{n+2} \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+2} \right)}{\mu^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+1} \right)} = \mu \left(\frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+2}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Or $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} : \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$, donc $\left| \frac{\lambda}{\mu} \right| < 1$

Puis suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+1} = 0$,

donc par différence et par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+2}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+1}} \right) = 1$

Finalement, par produit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Les rapports de termes consécutifs de la suite de Fibonacci tendent vers le nombre d'or.