TD N° 01: Notation Σ

L'objet de ce TD est de revoir et d'approfondir l'utilisation de la notation "Sigma" Σ pour les sommes. Pour revoir l'utilisation de cette notation, vous pouvez visionner la vidéo Youtube publiée sur la chaîne Maths Langella sur ce sujet.
Une correction de ces exercices est proposée en ligne sur le site maths.langella.free.fr (la correction du dernier exercice est faite dans le corrigé du TP01).

Exercice 1 On rappelle que pour "alterner les signes" on utilise souvent un facteur $(-1)^n$, pour "lister les impairs" on utilise l'écriture $2k+1$ et pour les pairs l'écriture $2k$.
Écrire à l'aide de la notation Σ les sommes suivantes :

1. $S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2$
2. $S_2 = 3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 8^5$
3. $S_3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + ...$
4. $S_4 = 1 - 8 + 27 - 64 + 125...$
5. $S_5 = 2 \times 2 + 4 \times 3 + 6 \times 4 + 8 \times 5 + 10 \times 6 + 12 \times 7 + 14 \times 8 + ...$

Exercice 2 On rappelle la somme des termes d'une suite arithmétique : $S = N \times \frac{\text{1er terme+dernier terme}}{2}$ et d'une suite géométrique : $S = (\text{1er terme}) \times \frac{1-q^N}{1-q}$, où N désigne le nombre total de termes dans la somme considérée. En se ramenant à de telles sommes de termes, calculer :

1. $S_1 = \sum\limits_{i=0}^{10} 2i$
2. $S_2 = \sum\limits_{p=3}^{10} \frac{3}{5^p}$
3. $S_3 = \sum\limits_{k=10}^{92} (3k+5)$

Exercice 3 Rappelons que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (cela a été démontré par récurrence dans l'ex.2 du DS01, dont le corrigé est en ligne, et revu à l'ex.1 du DM03).
On appelle "réindexation" d'une somme un changement d'indice. Par exemple (en prenant $j = i - 4$), $\sum\limits_{i=4}^{14} (i-4)^2 = \sum\limits_{j=0}^{10} j^2$. En utilisant éventuellement une réindexation,

1. Calculer : $S = \sum\limits_{k=2}^{n} (k-1)^2$
2. Démontrer par récurrence que pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$; une telle somme est dite *télescopique*.

On dit que l'on a une somme double lorsque l'on a une "somme de sommes" ; il y a donc deux indices.
Par exemple, pour simplifier $S = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{i}{2^j} = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{i}{2^j} \right)$. On travaille "de l'intérieur vers l'extérieur" :

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{i}{2^j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{i}{2^j} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} i \times \frac{1}{2^j} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \left(\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2} \right)^j \right) \qquad \text{(suite géometrique de raison 1/2)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \right) \qquad \text{(somme des termes d'une suite géométrique)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{-\frac{1}{2}} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \left(\frac{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}}{-\frac{1}{2}} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{2 \times 2^{n+1}} \right) \qquad \text{(la grande parenthèse ne dépend pas de i)} \\
&= \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{2 \times 2^{n+1}} \right) \times \sum_{i=0}^{n} i \qquad \text{(somme des termes d'une suite arithmétique de raison 1)} \\
&= \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{2 \times 2^{n+1}} \right) \times (n+1) \times \frac{0+n}{2} \\
&= \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{2 \times 2^{n+1}} \right) \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(1 - 2^{n+1})}{2^{n+3}}
\end{aligned}
$$

Exercice 4 En s'inspirant de l'exemple ci-dessus :

1. Calculer $S_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n} i \times j$
2. Calculer $S_2 = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n} (i + j)$

Exercice 5 On rappelle que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
La formule du binôme de Newton est la généralisation des identités remarquables :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Démontrer cette formule par récurrence sur n.