

Exercice 1

$$\begin{aligned}
 A \neq B &= \neg (A = B) \\
 &= \neg (A \subset B \text{ et } B \subset A) \\
 &= \neg (A \subset B) \vee \neg (B \subset A) \\
 &= \neg (\forall a \in A, a \in B) \vee \neg (\forall b \in B, b \in A) \\
 &= (\exists a \in A \text{ tq } a \notin B) \vee (\exists b \in B \text{ tq } b \notin A) \\
 &= (\exists a \in A \setminus B) \vee (\exists b \in B \setminus A)
 \end{aligned}$$

Exercice 2

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) = \left\{ \emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \{3, 4\}; \{1, 2, 3\}; \{1, 2, 4\}; \{1, 3, 4\}; \{2, 3, 4\}; \{1, 2, 3, 4\} \right\}$$

On appelle "cardinal" le nombre d'éléments d'un ensemble.

Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $\text{card } E = 4$ (on note parfois $\#E = 4$).

Propriété connue:

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n .

Autrement dit: si $\text{card } E = n$, alors $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

C'est une façon de vérifier qu'on a bien énuméré tous les éléments de $\mathcal{P}(E)$: on en a bien $2^4 = 16$.

Exercice 3

$$1) \text{Hg: } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \text{ et } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \text{ et } (x \in A \vee x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \text{ et } (x \in A \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$2.) \neg: (A \cup B) = A \cap B$$

102 2/5

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow \neg (x \in A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow \neg (x \in A \text{ et } x \in B)$$

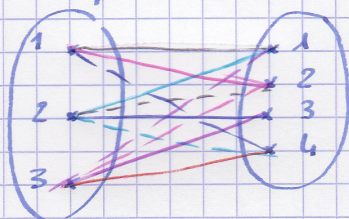
$$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap B$$

Exercice

$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ peut être vu comme "toutes les façons de relier deux points" entre les ensembles:



$$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\} = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4)\}.$$



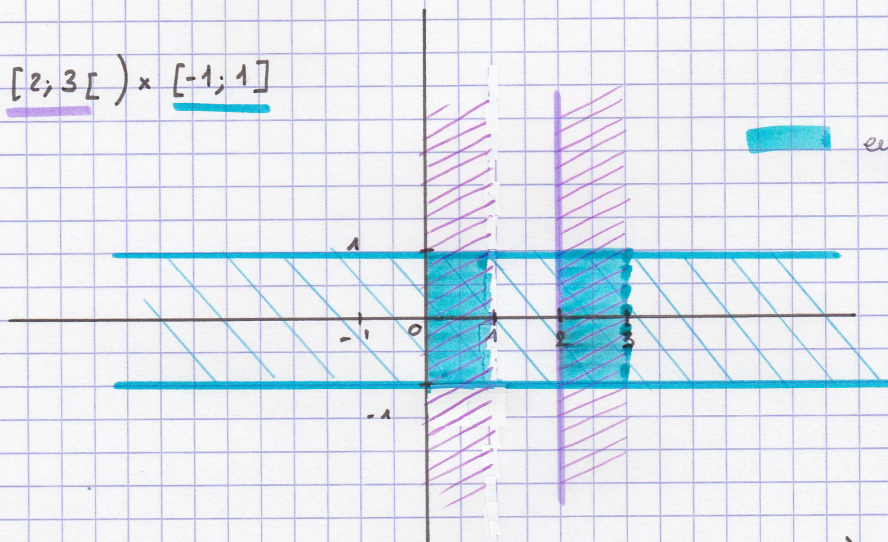
Ne pas confondre: • une paire $\{1, 2\}$, comme dans l'exercice 2, qui est un ensemble à deux éléments et où l'ordre n'importe pas.

• un couple $(1, 2)$, comme ci-dessus, qui est l'association de deux éléments pris dans deux ensembles différents, et où l'ordre est important.

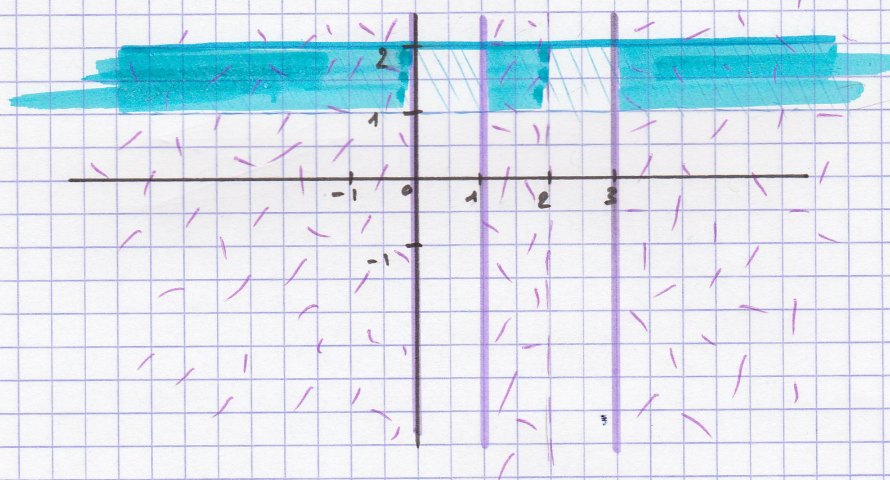
Par exemple, on a vu déjà les couples de coordonnées, et on voit que le point $M(2; 1)$ et le point $P(1; 2)$ ne sont pas au même endroit!

Exercice 5

$$1^o) (\underbrace{]0; 1[} \cup \underbrace{[2; 3[}) \times \underbrace{[-1; 1]}$$



$$2^o) (\mathbb{R} \setminus (\underbrace{]0; 1[} \cup \underbrace{[2; 3[}) \times ((\mathbb{R} \setminus [-1; 1]) \cap [0; 2])$$

Exercice 6

$$1^o) \text{ La contrainte de: } \forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$$

$$\text{car: } \forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \neq B) \Rightarrow (A \cap B \neq A \cup B)$$

$$(A \neq B) \equiv \neg(A = B) \equiv \neg(A \subset B \wedge B \subset A)$$

$$\equiv \neg(A \subset B) \vee \neg(B \subset A)$$

$$\equiv \neg(\forall x \in A, x \in B) \vee \neg(\forall x \in B, x \in A)$$

$$\equiv (\exists x \in A: x \notin B) \vee (\exists x \in B: x \notin A) (*)$$

$$\text{Or } A \cap B \neq A \cup B \equiv \neg(A \cap B = A \cup B) \equiv \neg(A \cap B \subset A \cup B \wedge A \cup B \subset A \cap B)$$

$$\equiv \neg(A \cap B \subset A \cup B) \vee \neg(A \cup B \subset A \cap B)$$

$$\equiv \neg(\forall x \in A \cap B, x \in A \cup B) \vee \neg(\forall x \in A \cup B, x \in A \cap B)$$

$$\begin{aligned}
&= (\exists x \in A \cap B, x \notin A \cup B) \vee (\exists x \in A \cup B: x \notin A \cap B) \\
&= (\underbrace{\exists x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A \cup B}_{\text{contradiction}}) \vee (\exists x: (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A \cap B) \\
&= (\exists x \in A \wedge x \notin A \cap B) \vee (\exists x \in B \wedge x \notin A \cap B) \\
&= (\exists x \in A \setminus B) \vee (\exists x \in B \setminus A) \\
&= (\exists x \in A: x \notin B) \vee (\exists x \in B: x \notin A) \quad (*)
\end{aligned}$$

6 qui achève la démonstration.

2.) Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

La contraposée de $(A \cap B = A \cap C \wedge A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$

est $B \neq C \Rightarrow (A \cup B \neq A \cup C \text{ ou } A \cap B \neq A \cap C)$

$$B \neq C \equiv \neg (B \subset C \wedge C \subset B)$$

$$\equiv B \not\subset C \text{ ou } C \not\subset B$$

$$\equiv (\exists x \in B \wedge x \notin C) \vee (\exists x \in C \wedge x \notin B)$$

$$\equiv (\exists x \in B \setminus C) \vee (\exists x \in C \setminus B)$$

Or $(A \cup B \neq A \cup C \text{ ou } A \cap B \neq A \cap C)$

$$\begin{aligned}
&\equiv \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in A \cup B: x \notin A \cup C \\ \vee \\ \exists x \in A \cup C: x \notin A \cup B \\ \vee \\ \exists x \in A \cap B: x \notin A \cap C \\ \vee \\ \exists x \in A \cap C: x \notin A \cap B \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\equiv \underbrace{\exists x \in A: x \notin A \cup C}_{\text{contradiction}}$$

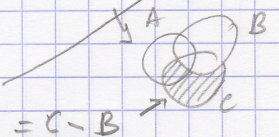
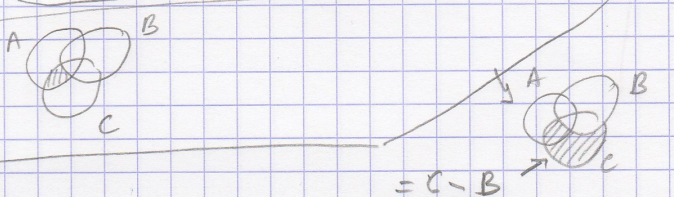
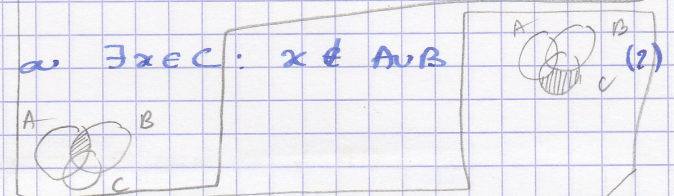
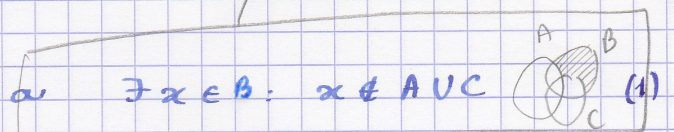
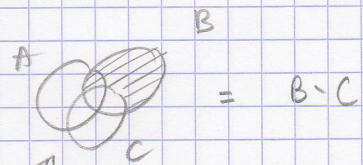
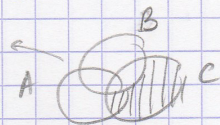
$$\vee \underbrace{\exists x \in A: x \notin A \cup B}_{\text{contradiction}}$$

$$\vee \exists x \in (A \cap B) \setminus C \quad (3)$$

$$\vee \exists x \in (A \cap C) \setminus B \quad (4)$$

$$\vee \exists x \in B: x \notin A \cup C \quad (1)$$

$$\vee \exists x \in C: x \notin A \cup B \quad (2)$$



$$= \begin{cases} \underbrace{\exists x \in B: x \notin A \cup C}_{(1)} & \text{ou} & \underbrace{\exists x \in (A \cap B) \setminus C}_{(3)} \\ \underbrace{\exists x \in C: x \notin A \cup B}_{(2)} & \text{ou} & \underbrace{\exists x \in (A \cap C) \setminus B}_{(4)} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \exists x \in ((B \setminus (A \cup C)) \cup ((A \cap B) \setminus C)) \\ \text{ou} \\ \exists x \in ((C \setminus (A \cup B)) \cup ((A \cap C) \setminus B)) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \exists x \in B \setminus C \\ \text{ou} \\ \exists x \in C \setminus B \end{cases}, \text{ ce qui achève la démonstration.}$$

—x—