TD N° 03: Applications

L'objet de ce TD est d'approfondir la notion d'application. Ce TD utilise pour support un cours vidéo issu du site "Canal U", site de ressources pour l'enseignement supérieur. Une correction des exercices est proposée en ligne sur le site maths.langella.free.fr , dans la rubrique Lycéens/Terminales S/ Vers le supérieur.

Merci de visionner la vidéo suivante (vous aurez besoin d'un casque audio), en faisant les exercices de ce TD au fur et à mesure. Ne tenez pas compte des "mini-exercices" données en fin de vidéo :

`www.youtube.com/watch?v=Y8cV0zcFijs`

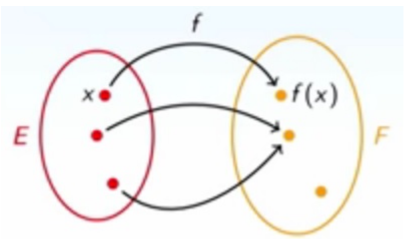
Applications : définitions, premières propriétés.

Def.1 : Définir une *application* $f : E \to F$, c'est associer à chaque élément $x \in E$ un unique élément $f(x) \in F$.
On remarque que par définition, un élément de F ne peut avoir plusieurs images (c'est ce que l'on a défini en lycée comme une "fonction"). Si tel était le cas, on dirait que f n'est pas une application mais une *relation*(qui est un terme plus général).
E s'appelle *l'ensemble de départ*, et F *l'ensemble d'arrivée.*

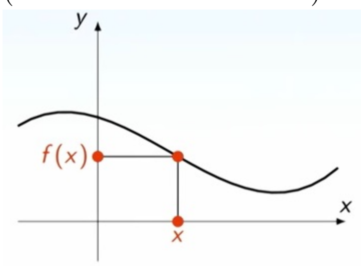
Cas particulier : L'*identité* , ou *application identité* ou *identité de* E, notée Id ou Id_E :

$$Id_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Représentation par des ensembles
(oui, on dit vraiment des "patates") :



Représentation par un graphe
(vous en avez l'habitude) :



Exercice 1 :

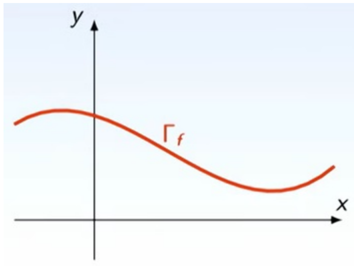
1. Dire si les relations proposées sont des applications :
   (a) f qui à $x \in \mathbb{R}_+$ associe y tel que $y^2 = x$
   (b) g qui à $x \in \mathbb{R}_+$ associe y tel que $|y| = x$
   (c) h qui à $x \in \mathbb{R}$ associe y tel que $y = x^2$
2. Donner l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée des applications définies par :
   (a) $f(x) = \sqrt{x}$
   (b) $g(x) = |x|$
   (c) $h(x) = x^2$
   (d) $k(x) = \sqrt{x^2}$

Def.2 : Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales ssi $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.
Attention, il faut penser à vérifier qu'elles ont bien le même ensemble de départ et le même ensemble d'arrivée !

Exercice 2 :
Dire si les applications suivantes sont égales :

1. $f_1(x) = \sqrt{x^2}$ et $f_2(x) = x$, sur $E = \mathbb{R}_+$
2. $f_1(x) = \sqrt{x^2}$ et $f_2(x) = x$, sur $E = \mathbb{R}$
3. $g_1(x) = \sqrt{x}$ et $f_1(x) = \sqrt{x^2}$, sur $E = \mathbb{R}$
4. $h_1(x) = \ln(e^x)$ et $h_2(x) = x$, sur $E = \mathbb{R}$
5. $k_1(x) = e^{\ln x}$ et $h_2(x) = x$, sur $E = \mathbb{R}$

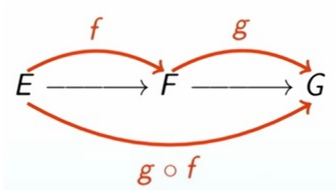
Def.3 : Le *graphe* de $f : E \to F$ est le sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$ défini par : $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F | x \in E\}$.



Exercice 3 :

1. Expliquez pourquoi dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on retrouve la représentation graphique dont vous avez l'habitude.
2. Quel type d'objet géométrique obtiendrait-on dans le cas d'une application de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Def.4 : On définit la *composée* de deux applications par :
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$,
$g \circ f : E \to G$ est définie par $g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$



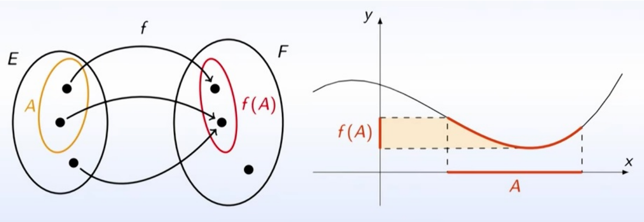
Attention à bien vérifier que l'ensemble de départ de g avec l'ensemble d'arrivée de f !

Exercice 4 :
Dans chacun des cas suivants, déterminer $g \circ f$.

1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x + 3$, et g définie par $g(x) = \sqrt{x}$
2. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - x - 6$, et g définie par $g(x) = \ln x$
3. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + 3x^2 - 4x$, et g définie par $g(x) = \frac{1}{x}$

Image directe, image réciproque.

Def.5 : Soient $f : E \to F$ et $A \subset E$.
L'*image directe* de A par f est l'ensemble $f(A) = \{f(x) \in F | x \in A\}$.
A est un sous-ensemble de E, et $f(A)$ un sous-ensemble de F.

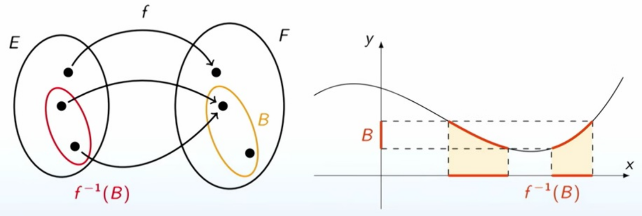


Exercice 5 Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(A)$:

1. $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2x^2 + 3 \end{array}$, et $A = [0; 1]$

2. $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x; y) & \mapsto & f(x; y) = x + y \end{array}$, et $A = \{(x; y) \in [-2; 2] \times \mathbb{R} | y = 0\}$

Def.6 : Soient $f : E \to F$ et $B \subset F$.
L'*image réciproque* de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$.
B est un sous-ensemble de F, et $f^{-1}(B)$ un sous-ensemble de E.

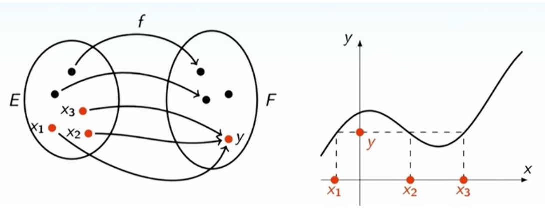


Exercice 6 Dans chacun des cas suivants, déterminer $f^{-1}(B)$:

1. $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$, et $B = [0; 4]$

2. $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x; y) & \mapsto & f(x; y) = |x| \end{array}$, et $B = \{5\}$ (on pourra faire une figure).

Def.7 : Soit $y \in F$. Tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est *un antécédent* de y.
L'ensemble des antécédents de y se note donc $f^{-1}(y)$, et c'est un sous-ensemble de E.



Exercice 7 Dans chacun des cas suivants, déterminer $f^{-1}(y)$:

1. $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$, et $y = 9$

2. $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x; y) & \mapsto & f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$, et $y = 5$