TD N° 04: Injections, surjections, bijections.

L'objet de ce TD est de découvrir les notions d'application, d'injection, de surjection. Ce TD utilise pour support un cours vidéo issu du site "Canal U", site de ressources pour l'enseignement supérieur. Une correction des exercices est proposée en ligne sur le site maths.langella.free.fr , dans la rubrique Lycéens/Terminales S/ Vers le supérieur.

Merci de visionner la vidéo suivante (vous aurez besoin d'un casque audio) :

`https://www.youtube.com/watch?v=KQMQ4EFLjG0`

Des indications pour les exercices, ainsi que les corrigés (dont certains sont en vidéo) sont disponibles à cette adresse :

`http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00003.pdf`

Rappel : composition.

On rappelle que $f \circ g$ signifie "f de g", et n'est définie que pour les valeurs de x telles que $g(x) \in \mathscr{D}_f$.

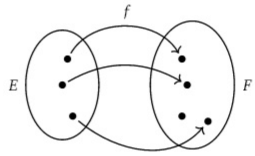
Exercice 1 :
Soient f et g :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 + 1$.
A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

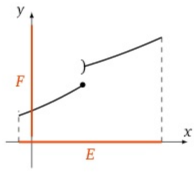
Exercice 2 :
Soit $f : [0; 1] \to [0; 1]$ telle que $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 - x \text{ sinon.} \end{cases}$
Démontrer que $f \circ f = Id$ (on dit dans ce cas que f est *involutive*).

Injection, surjection, bijection.

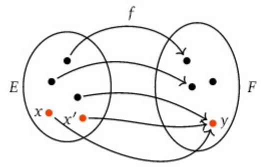
Soient E, F deux ensembles et $f : E \mapsto F$ une application.
Def.1 : f est dite *injective* ssi pour tous x, $x' \in E$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

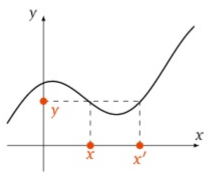
Cela signifie que chaque élément de l'ensemble d'arrivée F a un antécédent ou zéro, mais jamais deux ou plus.
Exemples d'applications injectives :



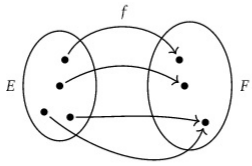


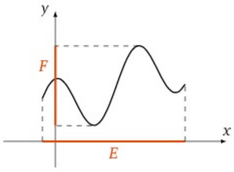
Exemples d'applications non injectives :



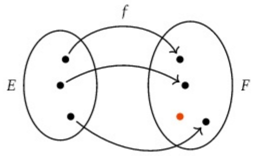


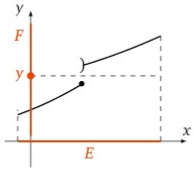
Def.2 : f est dite *surjective* ssi pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Cela signifie que chaque élément de l'ensemble d'arrivée F a au moins un antécédent, éventuellement plusieurs, mais jamais zéro. Autrement dit, on a $f(E) = F$.
Exemples d'applications surjectives :



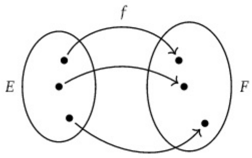


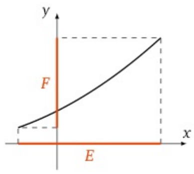
Exemples d'applications non surjectives :





Def.3 : f est dite *bijective* ssi elle est *injective* et *surjective* : $\forall y \in F$, $\exists! x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Cela signifie que chaque élément de l'ensemble d'arrivée F a exactement un antécédent. Autrement dit, on a une "correspondance un à un" entre les éléments de l'ensemble de départ et ceux de l'ensemble d'arrivée.





Par exemple, une application continue strictement monotone d'un intervalle dans un autre est une bijection, d'où le théorème de "la" valeur intermédiaire.
Pté.1 : Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. L'application f est bijective ssi il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = g \circ f = Id_E$.
2. Si f est bijective, alors l'application g définie ci-dessus est unique et est également bijective. L'application g s'appelle la *bijection réciproque de f* et se note f^{-1}.
C'est la « marche arrière » de f. On a $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
Pté.2 : Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications bijectives.
Alors l'application $g \circ f$ est bijective, et sa bijection réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercices.

Exercice 3 Soit $f : [1; +\infty[\to [0; +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$.
f est-elle bijective ?

Exercice 4 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n + 1$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x; y) \mapsto (x + y; x - y)$
4. $k : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto eit$.
Modifier les ensembles de départ et d'arrivée pour que (la restriction de) f devienne bijective.

Exercice 6 Pour $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $e^z = e^{x+iy} = e^x \times e^{iy}$.

1. Déterminer le module et l'argument de e^z
2. Calculer $e^{z+z'}$, $e^{\overline{z}}$, e^{-z}, $(e^z)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$
3. L'application $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$ est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 7 Soient quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$.
Démontrer que :

1. $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.
2. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.
3. ($g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives) $\Leftrightarrow$ (f, h et g bijectives).

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ? Surjective ?
2. Démontrer que $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$
3. Démontrer que la restriction $g : [-1; 1] \to [-1; 1]$ t.q. $\forall x \in [-1; 1]$, $g(x) = f(x)$ (restriction de f à l'intervalle $[-1; 1]$).
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.