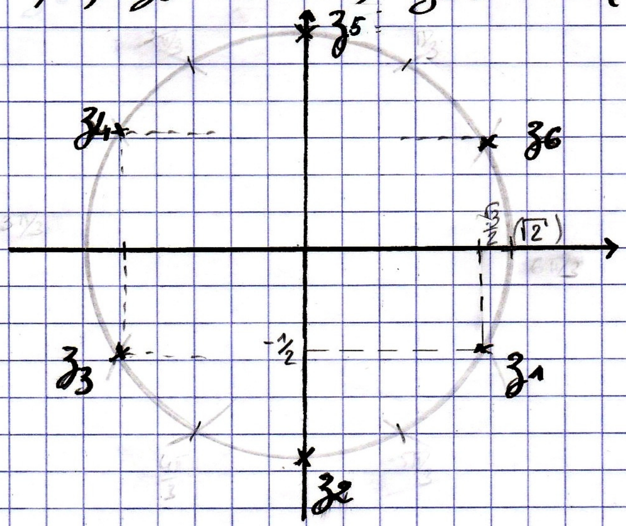
$z \in \mathbb{C}$; $P(z) = z^6 + 8$.

1.a) On vérifie que les solutions sont :

$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$; $z_2 = \sqrt{2} \times (-i)$; $z_3 = \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$;

$z_4 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$; $z_5 = \sqrt{2} \times i$; $z_6 = \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

1b)



2.a) $a \times \bar{a} = (x+iy)(x-iy)$
$= x^2 - i\cancel{xy} + i\cancel{yx} - i^2y^2$
$= x^2 + y^2 = OA^2$.

2.b) On suppose donc que $a\bar{a} = 1$.

$(z-a)(z-\bar{a}) = z^2 - z\bar{a} - az + \underbrace{a\bar{a}}$
$= z^2 - z(\underbrace{a+\bar{a}}) + 1$
$= z^2 - 2\,\mathrm{Re}(a)\,z + 1$.

3) $P(\bar{z}) = (\bar{z})^6 + 8$
$= \overline{(z^6)} + 8$
$= \overline{(z^6)} + \overline{8}$
$= \overline{z^6 + 8}$
$= \overline{0}$ car $z^6 + 8 = 0$ $(P(z) = 0)$
$= 0$

Donc si un réel z est une racine de P, alors $\bar{z}$ l'est aussi.
Comme P est de degré 6, il admet 6 racines et donc 3 couples de racines conjuguées.

4°) $P(z) = z^6 + 8$, dont les racines sont les solutions trouvées à l'équation de la question 1.

D'où $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6)$, où $z_1, \dots z_6$ sont les solutions trouvées à la question 1.