

4. Énoncés des devoirs maison

. Devoir maison 05.A : des clés de contrôle dans les codes qui nous entourent.

Partie A : Les codes ISBN (International Standard book number)

L'ISBN est un numéro international qui permet d'identifier les livres. Depuis le 1er janvier 2007, le code ISBN correspond au code-barres, avec des tirets en plus. De plus, il commence toujours par 978 ou 979 : on a d'abord fait précéder les codes ISBN existants de 978, puis lorsque les possibilités de code avec le préfixe 978 ont été épuisées, on a utilisé le préfixe 979.

Avant 2007, il était composé de 10 chiffres.

Par rapport au numéro ISBN actuel l'ancien ne comportait pas les trois premiers chiffres (978 ou 979), et le dixième était calculé de la façon décrite ci-dessous :

Calcul de la clé de contrôle :

- En partant de la gauche, on multiplie le premier chiffre par 10, le second par 9, et ainsi de suite jusqu'au neuvième que l'on multiplie par 2.
- On ajoute ces produits, on divise par 11 et on retranche à 11 le reste de cette division. Si ce dernier nombre est inférieur ou égal à 9, on le prend comme clé. S'il vaut 10 on prend la lettre X, et s'il vaut 11 la clé est 0.

1. Le numéro ISBN de la 5^e édition du Netter (Atlas d'anatomie humaine) est 978-2-294-71297-5. Quel aurait été son numéro ISBN avec l'ancienne numérotation ?
2. Chez vous, choisissez 5 livres, notez de quels ouvrages il s'agit, leur numéro ISBN, et vérifiez-en la clé (écrivez vos calculs). Présentez les résultats sous forme de tableau.

Partie B : Le numéro INSEE

En 1940, le contrôleur général des armées René Camille crée un numéro à 12 chiffres appelé "numéro de français" :

- 2 chiffres pour l'année de naissance
- 2 chiffres pour le mois de naissance
- 2 chiffres pour le département de naissance
- 3 chiffres pour le numéro de la commune de naissance
- 3 chiffres pour le numéro d'inscription sur le registre d'état civil

Un treizième chiffre pour désigner le sexe de la personne (2 pour les femmes et 1 pour les hommes) fut ajouté en tête.

En 1946, le SNS (service national des statistiques) devient l'INSEE (Institut National des Statistiques et des Études Économiques) et ce numéro est adopté par la sécurité sociale : on parle alors de numéro INSEE ou de numéro de sécurité sociale.

En 1970, avec le développement de l'informatique, une clé de vérification est ajoutée à la fin du numéro, qui passe alors à 15 chiffres. Si A est l'entier formé par les 13 premiers chiffres et R le reste de la division euclidienne de A par 97, alors la clé est $K = 97 - R$.

1. Calculez la clé du numéro INSEE 1 59 07 42 187 118.
2. Donnez le code d'au moins l'une des villes de naissance des personnes de votre entourage.
3. Votre numéro INSEE figure sur votre convocation de Bac de l'an dernier ; demandez à vos proches leur numéro INSEE : vérifiez-en la clé (écrivez vos calculs). Présentez les résultats sous forme de tableau (au moins trois numéros INSEE en tout).

. Devoir maison 05.B : valuation p-adique d'un rationnel positif.

Propriété admise : Soit p un nombre premier fixé. Pour tout nombre rationnel x strictement positif ($x \in \mathbb{Q}_+^*$), il existe un unique entier relatif k tel que x s'écrive sous la forme

$$x = p^k \times \frac{a}{b}$$

avec $a, b \in \mathbb{N}$, non multiples de p .

Cet entier k est appelé *valuation p-adique* de x et se note $v_p(x)$.

Exemple : Pour $x = \frac{24}{5}$, on a $x = \frac{2^3 \times 3}{5} = 2^3 \times \frac{3}{5}$ (ni 3 ni 5 ne sont multiples de 2), et donc $v_2\left(\frac{24}{5}\right) = 3$.

1. Justifier que : $v_3\left(\frac{24}{5}\right) = 1$; $v_5\left(\frac{24}{5}\right) = -1$; $v_7\left(\frac{24}{5}\right) = 0$.

2. Calculer les valuations suivantes : $v_5\left(\frac{100}{3}\right)$; $v_3\left(\frac{405}{12}\right)$; $v_7\left(\frac{49}{20}\right)$; $v_3(75)$; $v_3(3^6)$; $v_7\left(\frac{25}{16}\right)$.

Dans les questions suivantes, p désigne un nombre premier.

3. Vérifier que $\forall k \in \mathbb{Z}, v_p(p^k) = k$.

4. Démontrer que $\forall x, y \in \mathbb{Q}$,

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$$

5. En déduire que $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}^*$, on a :

$$v_p\left(\frac{x}{y}\right) = v_p(x) - v_p(y)$$

(On pourra utiliser le fait que $x = \frac{x}{y} \times y$).

6. Écrire un algorithme (pas un programme, ou alors exclusivement en Python pour ceux qui connaissent) permettant de calculer la valuation p -adique d'un rationnel strictement positif $\frac{a}{b}$; on pourra s'aider des fiches pages II à VII qui figurent au début du manuel "repères".

Le reste d'une division euclidienne se note `%`. Par exemple, le reste de la division euclidienne de 10 par 3 sera noté :

```
>>> 10%3
```

et on obtiendra le résultat :

```
1
```