

Examen ou concours :

Série\* :

Spécialité/option :

Repère de l'épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :

(Préciser, s'il y a lieu, le sujet choisi)

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles intercalaires dans le bon sens.

Note :

20

Appréciation du correcteur (uniquement s'il s'agit d'un examen) :

03.A - Correction  
 $\equiv$  Suites adjacentes  $\equiv$

\* Uniquement s'il s'agit d'un examen.

On appelle suites adjacentes deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que :

- $(u_n)$  est croissante
- $(v_n)$  est décroissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

1.)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$\begin{cases} u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ v_n = u_n + \frac{1}{n} \end{cases}$$

1.a) Ici, une récurrence est vraiment inutile !!!

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{n} > 0$

donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n + \frac{1}{n} > u_n$

Il a fallu,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n \geq u_n$

1.b) Montrons que la suite  $(u_n)$  est croissante.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$

Or  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ . Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} > u_n$ ,

il i.e. la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

• Montrons que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $v_{n+1} - v_n = \left( u_{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) - \left( u_n + \frac{1}{n} \right)$

$$= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

N°

1/6

$$\begin{aligned}
 V_{n+1} - V_n &= \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} \\
 &= \frac{n + n^2 + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)^2} \\
 &= \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} \\
 &= \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 \quad \text{par tout } n \in \mathbb{N}^*
 \end{aligned}$$

|| Donc la suite  $(V_n)$  est strictement décroissante.

1.c)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq V_n$

Or  $(V_n)$  strictement décroissante, donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n < V_0$ .

|| Par transitivité de l'inégalité,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n < V_0$ .

la suite  $(U_n)$  est majorée par  $V_0$ .

|| De la même manière,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n > U_0$ .

la suite  $(V_n)$  est minorée par  $U_0$ .

1.d) ||  $(U_n)$  est croissante et majorée, donc elle converge<sup>\*</sup>.

||  $(V_n)$  est décroissante et minorée, donc elle converge<sup>\*\*</sup>.

Raisonnons par l'absurde et supposons que les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  ont des limites distinctes.

Pour  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l_1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l_2$ .

Par différence,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = l_2 - l_1$ .

Or  $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n - U_n = \frac{1}{n}$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , on a  $l_2 - l_1 = 0$ ,

ce qui contredit le fait que ces limites soient distinctes.

|| Ainsi  $(U_n)$  et  $(V_n)$  convergent bien vers la même limite.

\* Pas forcément vers son majorant  $V_0$ !

\*\* Pas forcément vers son minorant  $U_0$ !

N°

2/h

$$2^*) \quad (U_n) \quad \begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{3U_n + 1}{4} \end{cases}$$

$$(V_n) \quad \begin{cases} V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = \frac{3V_n + 1}{4} \end{cases}$$

Penser à utiliser la définition des suites adjacentes!

2.a) Montrons par récurrence que  $(U_n)$  est croissante.

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(P_n)$ :  $U_{n+1} \geq U_n$

Initialisation:  $U_0 = 0$  et  $U_1 = \frac{3 \times 0 + 1}{4} = \frac{1}{4}$ ; donc  $U_1 \geq U_0$ ,  $(P_0)$  vraie.

Hérédité: Supposons que pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(P_n)$  soit vraie.

$$U_{n+1} \geq U_n \quad (\text{H.R.})$$

$$3U_{n+1} \geq 3U_n \quad (3 > 0)$$

$$3U_{n+1} + 1 \geq 3U_n + 1$$

$$\frac{3U_{n+1} + 1}{4} \geq \frac{3U_n + 1}{4} \quad (4 > 0)$$

$$U_{n+2} \geq U_{n+1}$$

Donc  $(P_{n+1})$  est vraie.

|| Conclusion:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} \geq U_n$ : la suite  $(U_n)$  est croissante.

On montre de la même manière que  $(V_n)$  est décroissante.

$$\text{En effet, } V_0 = 2 \text{ et } V_1 = \frac{3 \times 2 + 1}{4} = \frac{7}{4} < 2.$$

La propriété est initialisée, et l'hérédité se montre de la même manière que pour  $(U_n)$ .

|| Ainsi, la suite  $(V_n)$  est décroissante.

Montrons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n - U_n = 0$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} - V_{n+1} &= \frac{3U_n + 1}{4} - \frac{3V_n + 1}{4} \\ &= \frac{1}{4} (3U_n + 1 - 3V_n - 1) \\ &= \frac{3}{4} (U_n - V_n) \end{aligned}$$

// Ainsi, la suite de terme général  $(U_n - V_n)$  est géométrique de raison  $\frac{3}{4}$  et de premier terme  $U_0 - V_0 = -2$ .

D'après le cours sur les suites géométriques (classe de 1<sup>ère</sup>), comme  $|\frac{3}{4}| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$ .

// Les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  sont donc des suites adjacentes.

D'après la question précédente, elles ont la même limite.

2.b) (On redémontre ici le théorème du point fixe, mais comme il sera dans le chapitre sur la continuité, on pourra l'utiliser sans démonstration en tant que faisant partie du cours de terminale).

Notons  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

par produit,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3U_n = 3l$ .

par somme,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3U_n + 1 = 3l + 1$ .

par quotient,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3U_n + 1}{4} = \frac{3l + 1}{4}$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \frac{3l + 1}{4}$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = l$  (c'est la même suite que  $(U_n)$ ).

Donc  $\frac{3l + 1}{4} = l$ .

soit  $3l + 1 = 4l$ .

soit  $l = 1$ .

// Finalement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$ ; et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1$ .