6. Devoir maison 03.A : Suites adjacentes

On appelle ***suites adjacentes*** deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

- (u_n) est croissante,
- (v_n) est décroissante,
- et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

1. Soient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2} + ...$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geqslant u_n$.
   (b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante.
   (c) En déduite que les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement majorée et minorée.
   (d) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent, puis justifier qu'elles ont la même limite.

   On démontre plus généralement le théorème :

   Théorème 3.7 Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

2. **Application**. Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par :
   $u_0 = 0$, $v_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4}$ et $v_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4}$.
   (a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) Déterminer leur limite commune.

7. Devoir maison 03.B : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Les suites arithmétiques et géométriques par exemple sont des suites récurrentes linéaires d'ordre 1 (chaque terme dépend seulement du terme précédent).
On va étudier ici les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, c'est-à-dire telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont des nombres réels (ici chaque terme dépend des *deux* précédents).

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = -\frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$
   (a) On cherche deux réels α et β distincts tels que les suites (v_n) et (w_n), définies par $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ et $w_n = u_{n+1} - \beta u_n$ soient des suites *géométriques* de raisons respectives α et β.
      i. Montrer que α et β sont les solutions de l'équation $X^2 = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$
      ii. En déduire les valeurs de α et β. On prendra $\alpha < \beta$.
   (b) i. Démontrer que $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n.
      ii. Déterminer l'expression du terme général de la suite (w_n)
   (c) En déduire l'expression du terme général de la suite (u_n).

2. **Application**. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$, $u_1 = 6,6$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + 0,24u_n$.
   (a) Déterminer les solutions α et β de l'équation $X^2 = X + 0,24$
   (b) i. Déterminer l'expression de v_n et de w_n en fonction de n.
      ii. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.