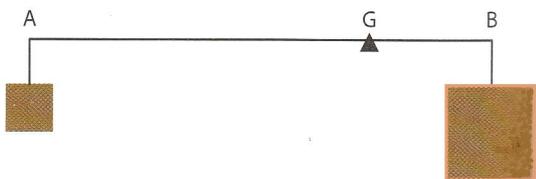


10. Devoir maison

A. Avec deux points



On considère une balance représentée par le segment $[AB]$ de longueur 10 cm et on suspend une masse de $m_A = 2\text{ kg}$ en A et une masse de $m_B = 6\text{ kg}$ en B .

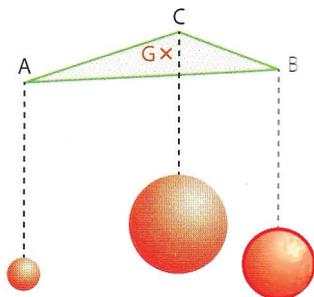
On cherche le point d'équilibre G de ce système.

La deuxième loi de Newton appliquée à un solide en rotation permet d'écrire la relation : $m_A \vec{GA} + m_B \vec{GB} = \vec{0}$. On dit que le point G est le **barycentre du système** de points pondérés $\{(A, m_A), (B, m_B)\}$, où les masses sont les coefficients affectés aux points A et B .

1. A l'aide de la relation de Chasles, exprimer la vecteur \vec{AG} en fonction du vecteur \vec{AB} de manière générale.
2. En déduire, dans l'exemple donné, la position exacte du point G .
3. En mathématiques, dans le système $\{(A, a), (B, b)\}$, les coefficients a et b ne représentent pas nécessairement des masses, et peuvent prendre des valeurs négatives.
A l'aide de la question précédente, étudier la position du point G selon les signes des coefficients.
4. Étudier le cas où $a + b = 0$. Que se passe-t-il pour le point G ? (On obtient une condition d'existence du barycentre).

On peut ainsi définir la droite (AB) comme l'ensemble des points M barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha), (B, 1 - \alpha)\}$ quand α décrit \mathbb{R} .

B. Avec plusieurs points



1. Avec trois points, on définit de même le barycentre G du système $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ par $a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$.
On note H le barycentre du système $\{(A, a), (B, b)\}$ quand il existe, montrer qu'alors G est le barycentre du système $\{(H, a + b), (C, c)\}$.
Ceci est la propriété d'associativité du barycentre : "On ne change pas le barycentre d'un système de points pondérés si on remplace un sous-ensemble de points par leur barycentre".
2. Construire, en utilisant cette propriété d'associativité, le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 2), (C, 3)\}$.
3. De même avec quatre points, construire le barycentre du système $\{(A, -1), (B, 3), (C, 2), (D, 1)\}$.

C. Terre-Lune



On sait que la distance Terre-Lune vaut 384 400 km et que la masse de la Terre est 81 fois plus grande que celle de la Lune. On note A et B les centres des deux sphères et G leur barycentre.

1. Montrer que leur barycentre est situé à environ 4 688 km du centre de la Terre.
2. Sachant que le rayon de la Terre est de 6 424 km, représenter un schéma du système Terre-Lune, avec leur barycentre.