

4. Devoir maison : Rappels sur la dérivation - Asymptote oblique

Les deux parties sont indépendantes et n'ont aucun rapport l'une avec l'autre.

Partie A : Révisions sur la dérivation

Si on se souvient que $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, on n'a besoin, pour les fonctions "construites à base de" polynômes, fractions rationnelles et racines carrées, que de la formule de dérivation :

$$(x^k)' = kx^{k-1}$$

Par ailleurs, il faut connaître les formules :

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \text{en veillant à ne pas les confondre.}$$

Pour ce qui concerne l'ensemble de dérivabilité des fonction polynômiales, il y a une formulation utile :

« ... est définie et dérivable sur \mathbb{R} en tant que polynôme ».

Pour les fractions rationnelles, son pendant est : « ... est définie et dérivable en tant que fraction rationnelle, sauf pour les valeurs de x qui annulent son dénominateur » (il faut alors déterminer lesdites valeurs).

Pour des révisions plus approfondies, référez-vous au CH07 de mon cours de 1re S, qui est sur le site.

Déterminez l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = 4x^5 - 7x^3 + 6x - 1 \quad ; \quad g(x) = \frac{2x+1}{-5x-2} \quad ; \quad h(x) = 3x^3 - 5x + \sqrt{x} \quad ; \quad k(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

Partie B : Asymptote oblique

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3-x+1}{x^2}$. On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Vérifier que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.
3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et sa fonction dérivée. Vérifier que $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$.
En déduire le tableau de variations de f .
4. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, en déduire l'équation de l'asymptote à \mathcal{C} en 0.
5. On pose $\phi(x) = f(x) - x$. ϕ représente l'écart* entre la courbe \mathcal{C} et une certaine droite Δ : quelle est l'équation de cette droite Δ ?
6. Étudier $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} et la droite Δ ?
7. Étudier la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la droite Δ (on pourra s'intéresser au signe de $\phi(x)$).
8. Compléter le tableau de variations de f à l'aide des nouvelles informations que l'on a établies au fil des questions ci-dessus.
9. Tracer, dans un repère, \mathcal{C} (la représentation graphique de f), et la droite Δ .

* on ne peut parler de "distance" que si cette grandeur est positive.