Devoir Maison d'entraînement #2 - CORRIGÉ

Il faut que tu fasses ce devoir toi-même pour détecter les points que tu dois réviser pour le devoir commun, mais rien ne t'empêche d'y réfléchir en groupe avec tes amis; il faut juste qu'à la fin, tu saches faire tout ça tout(e) seul(e)....

Nom:	Prénom:..

A. ROC: "restitution organisée de connaissances".

f est définie et dérivable en tant que fraction rationnelle, sauf pour les valeurs de x qui annulent son dénominateur.

Donc f est définie sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, et dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

Soient a, h des réels tels que $a \in D_f$, $a+h \in D_f$, et $h \neq 0$. Le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est bien défini.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{h}\left(f(a+h)-f(a)\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{3(a+h)+2} - \frac{1}{3a+2}\right) \text{ il faut mettre au même dénominateur!}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{3a+2}{\left(3(a+h)+2\right)\left(3a+2\right)} - \frac{3(a+h)+2}{\left(3(a+h)+2\right)\left(3a+2\right)}\right) \text{ on a multiplié chaque fraction "en haut et en bas" par le dénominateur de l'autre}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{3a+2-\left[3(a+h)+2\right]}{\left(3(a+h)+2\right)\left(3a+2\right)}\right) \text{ ne pas développer le dénominateur, c'est long et ça ne sert à rien pour l'instant}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{3a+2-\left[3a+3h+2\right]}{\left(3(a+h)+2\right)\left(3a+2\right)}\right) \text{ en revanche, développer et simplifier le numérateur; attention au signe - : mettre des crochets!}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{\cancel{3a}\cancel{+2}\cancel{-3a}-3h\cancel{-2}}{\left(3(a+h)+2\right)\left(3a+2\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{h}}\left(\frac{-3\cancel{h}}{\left(3(a+h)+2\right)\left(3a+2\right)}\right) \text{ on peut simplifier par h avec le 1/h qui est resté "devant"}$$

$$= \frac{-3}{\left(3(a+h)+2\right)\left(3a+2\right)} \text{ il est encore inutile de développer le dénominateur}$$

$$= \frac{-3}{\left(3a+3h+2\right)\left(3a+2\right)} \text{ lorsque } h \to 0\text{, le premier facteur du dénominateur } \to (3a+2)$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-3}{\left(3a+3h+2\right)\left(3a+2\right)} = \frac{-3}{\left(3a+2\right)\left(3a+2\right)} = \frac{-3}{\left(3a+2\right)^2}$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, on a $f'(x) = \frac{-3}{\left(3x+2\right)^2}$.

B. Entraîne-toi à utiliser les formules

Fonction	D. de définition	D. de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x)=x^8$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=8x^7$
$f(x)=9$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=\dfrac{1}{5x+4}$	$\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{4}{5}\right\}$	$\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{4}{5}\right\}$	$f'(x)=\dfrac{-5}{(5x+4)^2}$
$f(x)=2\sqrt{x}\times(3x^2+2x+1)$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}^*_+$	$f'(x)=2\left[\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times(3x^2+2x+1)+\sqrt{x}\times(6x+2)\right]$ $=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\times(3x^2+2x+1)+2\sqrt{x}\times(6x+2)$ $=\dfrac{15x^2-6x+1}{\sqrt{x}}$
$f(x)=-6x^5+4x^2-3x+1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=-30x^4+8x-3$
$f(x)=(2x^2+4)(3x+1)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=(4x)(3x+1)+(2x^2+4)(3)$ $=12x^2+4x+6x^2+12=18x^2+4x+12$
$f(x)=\dfrac{5x+8}{3x+2}$	$\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$	$\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$	$f'(x)=\dfrac{(5)(3x+2)-(5x+8)(3)}{(3x+2)^2}$ $=\dfrac{15x+10-15x-24}{(3x+2)^2}=\dfrac{-14}{(3x+2)^2}$
$f(x)=(5x^3+4x^2+6)(7x^2+3x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)$ $=(15x^2+8x)(7x^2+3x)+(5x^3+4x^2+6)(14x+3)$ $=105x^4+45x^3+56x^3+24x^2+70x^4+15x^3+56x^3$ $+12x^2+84x+18$ $=175x^4+172x^3+36x^2+84x+18$

C. Avec des tangentes.

1°) f est définie et dérivable en tant que fraction rationnelle, sauf pour les valeurs de x qui annulent son dénominateur.

Donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{4}{5}\right\}$.

L'équation est de la forme $T_a \mid y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Or $f'(a)=\dfrac{-5}{(5a+4)^2}$, et $f(a)=\dfrac{1}{5a+4}$.

D'où l'équation: $y=f'(a)(x-a)+f(a) \Leftrightarrow y=\dfrac{-5}{(5a+4)^2}(x-a)+\dfrac{1}{5a+4}$. On peut la laisser "comme ça".

$$T_a \mid y=\frac{-5}{(5a+4)^2}(x-a)+\frac{1}{5a+4}$$