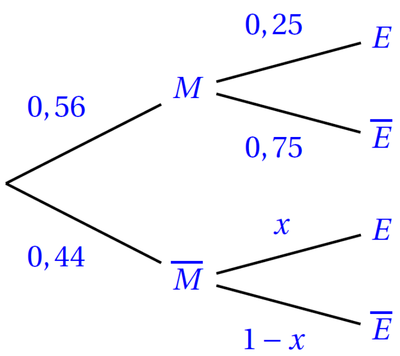
Corrigé du bac blanc de janvier 2020
(d'après APMEP, https://www.apmep.fr/-Terminale-S-264-sujets-depuis-)

Exercice 1 :

Partie A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.



2. Déterminer la probabilité de $M \cap E$.

$p(M \cap E) = 0,56 \times 0,25 = 0,14.$

3. a. Vérifier que $p(E) = 0,44x + 0,14$.

D'après la formule des probabilités totales, on a $P(E) = p(M \cap E) + p\left(\overline{M} \cap E\right) = 0,56 \times 0,25 + 0,44 \times x = 0,14 + 0,44x$.

b. En déduire la valeur de x.

D'après l'énoncé, on sait que $p(E) = 0,162$ car $16,2\%$ des téléspectateurs ont regardé l'émission. On a donc

$$0,14 + 0,44x = 0,162 \Longleftrightarrow x = \frac{0,162 - 0,14}{0,44} = 0,05.$$

Ainsi, il y a 5% des téléspectateurs ayant regardé l'émission sachant qu'ils n'ont pas regardé le match.

4. Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission. Quelle est la probabilité qu'il ait regardé le match ?

$$P_{\overline{E}}(M) = \frac{P(M \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{0,56 \times 0,75}{1 - 0,162} \approx 0,501 .$$

Partie B

1. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

On répète 300 expériences de Bernoulli de même paramètre $p = 0,56$. Pour chacune le succès est : « le téléspectateur a regardé le match ». Donc la variable aléatoire X est le nombre de succès. Ainsi par définition, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0,56$.

2. Quelle est la probabilité que l'entreprise appelle exactement 150 téléspectateurs ayant regardé le match ?

On cherche $P(X = 150)$; utilisons la calculatrice.
Texas Instruments : binomFdp (300, 0.56, 150)
On obtient : $P(X = 150) \approx 0,005$.

3. Calculer $P(150 \leqslant X \leqslant 175)$.

$P(150 \leqslant X \leqslant 175) = P(X \leqslant 175) - P(X < 150) = P(X \leqslant 175) - P(X \leqslant 149)$.
Texas Instruments : binomFRép (300, 0.56, 175) - binomFRép (300, 0.56, 149)
On obtient : $P(150 \leqslant X \leqslant 175) \approx 0,787$.

Exercice 2 :

Partie A

1. Justifier que $a = 1$.

La courbe de f passe par $A(0\,;\,0.5)$ donc en calculant $f(0) = \dfrac{a}{1+\mathrm{e}^{-b\times 0}} = \dfrac{a}{2}$ et sachant que ce nombre vaut $0,5$, on obtient $a = 1$.

On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$

$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}.$$

f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ donc a pour dérivée $-\dfrac{v'}{v^2}$, avec $v(x) = 1+e^{-bx}$ et $v'(x) = -be^{-bx}$. On obtient ainsi le résultat voulu en appliquant la formule de dérivation précédente.

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

La droite (AB) est la tangente en $A(0\,;\,0,5)$. Elle a pour coefficient directeur m égal à la dérivée de f en 0, à savoir $m = f'(0) = \dfrac{b}{4}$.

Par ailleurs, le coefficient directeur de cette droite peut se calculer par la formule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-0,5}{10-0} = 0,05$.

Ainsi, $\dfrac{b}{4} = 0,05 \iff b = 4\times 0,05 = 0,2$. Finalement $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}$.

Partie B

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.

Cette proportion est $p(10) = \dfrac{1}{1+e^{-2}} \approx 0,88$.

2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\,;\,+\infty[$.

D'après la partie A, p est dérivable et sa dérivée est, en prenant $b = 0,2$,

$$p'(x) = \frac{0,2\mathrm{e}^{-0,2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,2x}\right)^2}$$

Pour tout réel x positif, on a $0,2\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$ donc $p'(x) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$. Ainsi, p est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-0,2x} = 1$ par propriété de l'exponentielle et composée de fonctions. Ainsi, on a, par quotient de limites

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = 1$$

c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Dans le contexte de l'énoncé, plus les années x s'écoulent, plus la proportion $p(x)$ de personnes équipées augmentera jusqu'à atteindre les 100%. Ceci se traduit par la limite de la question précédente.

3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95%, le marché est saturé. Déterminer, en expliquant la démarche et à l'aide d'une inéquation ou de la table de votre calculatrice, l'année au cours de laquelle cela se produit.

On définit la fonction p à la calcualtrice et on affiche le tableau de valeurs, par exemple avec une valeur initiale de x égale à 0 et un pas de 1. On observe que $p(14) \approx 0{,}943$ et $p(15) \approx 0{,}953$.
Comme p est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$, la valeur de x cherchée est bien entre 14 et 15.
Le marché sera donc saturé durant l'année 2014.

Exercice 3 :

Partie A

1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD) .

d est orthogonale à P donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan et en particulier à (AC) . Donc (BD) est orthogonale (AC) .
(AC) est perpendiculaire à (AB) car ABC est rectangle en A .
(AC) est donc orthogonale à deux droites sécantes (BD) et (AB) du plan (BAD) , on en déduit que (AC) est orthogonale au plan (BAD) .

On appelle *bicoin* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.
2. Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est un bicoin.

d est perpendiculaire à P donc ABD et CBD sont rectangle en B .
ABC est rectangle en A d'après l'énoncé et on a montré dans la question précédente que (AC) est orthogonale au plan (BAD) , donc à tout droite de ce plan, donc en particulier (AC) est perpendiculaire à (AD) en A . Le triangle ACD est rectangle comme le triangle ABC .
Finalement, toutes ses faces étant des triangles rectangles, $ABCD$ est bien un bicoin.

Partie B

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2+z+1=0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = b^2-4ac = -3 < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} .$$

Soit z un nombre complexe non nul. On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\frac{1}{z}$.
2. Établir que, pour tout nombre complexe z différent de 0, on a :

$$z^2-\frac{1}{z} = (z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right) .$$

$$(z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right) = z^2+z+1-z-1-\frac{1}{z} = z^2-\frac{1}{z} .$$

3. On rappelle que si, $\vec{U}$ est un vecteur non nul et $\vec{V}$ un vecteur d'affixes respectives $z_{\vec{U}}$ et $z_{\vec{V}}$, les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $z_{\vec{V}} = k\, z_{\vec{U}}$.
En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A , N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si z^2+z+1 est un réel.

On suppose $z \neq 0$ (sinon P n'est pas défini).

Les points A, N et P sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{PA}$ et $\vec{PN}$ sont colinéaires.

$z_{\vec{PA}} = z_A - z_P = 1 - \frac{1}{z}$ Et $z_{\vec{PN}} = z_N - z_P = z^2 - \frac{1}{z}$.

Utilisons le rappel pour déterminer à quelle condition $\vec{PA}$ et $\vec{PN}$ sont colinéaires. $\vec{U}$ étant supposé non nul, il faut que $\vec{PA}$ soit non nul, c'est-à-dire que $z \neq 1$. Distinguons donc deux cas.

- Premier cas : $z \neq 1$. Alors $\vec{PA}$ n'est pas nul. D'après le rappel,

$\vec{PA}$ et $\vec{PN}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\frac{z_{\vec{PN}}}{z_{\vec{PA}}}$ est réel $\Leftrightarrow$ $\frac{z^2 - \frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}}$ est réel.

$\vec{PA}$ et $\vec{PN}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $z^2 + z + 1$ est réel (d'après la question 2).

- Deuxième cas : $z = 1$.

Alors les points A, N et P sont confondus, donc alignés.
D'autre part, $z^2 + z + 1 = 3$, donc $z^2 + z + 1$ est réel.

Finalement, A, N et P sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est réel.

4. On pose $z = x + i\,y$, où x et y désignent des nombres réels.
Justifier que : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$.

$$z^2 + z + 1 = (x+iy)^2 + x + iy + 1 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 + x + iy + 1$$
$$z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$$

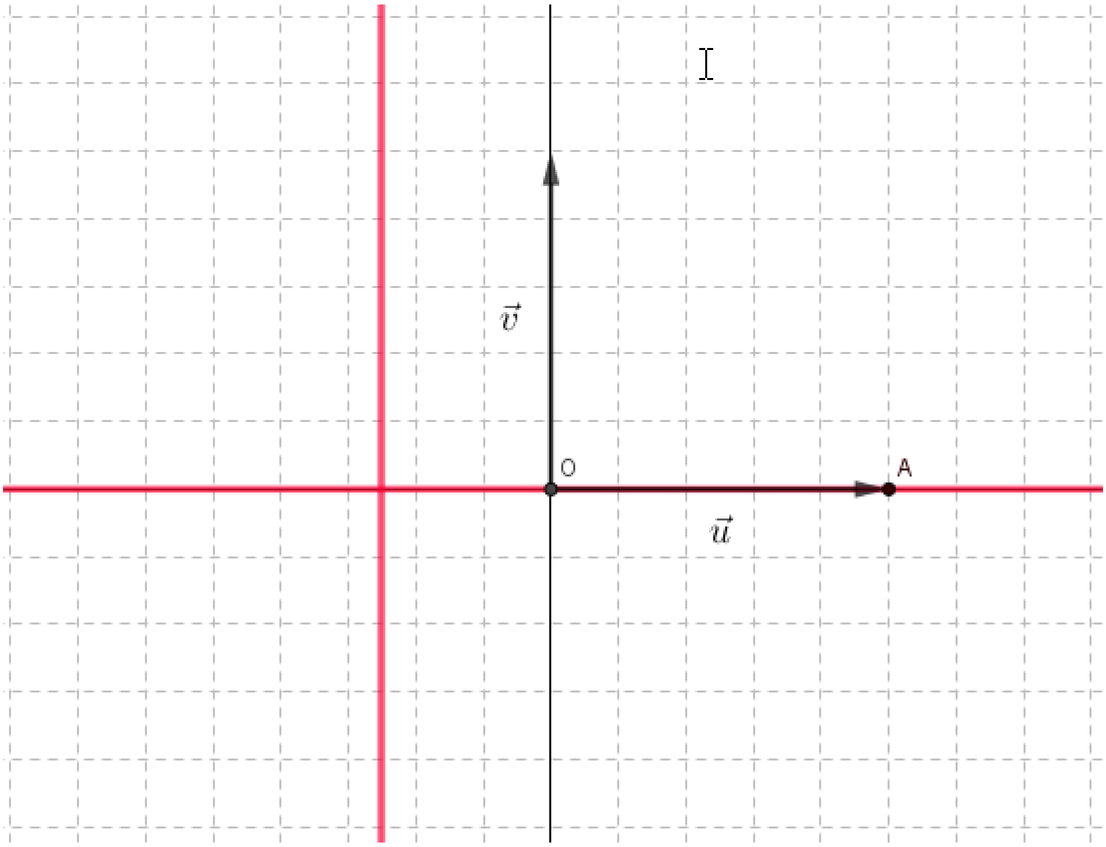
5. a. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.

Les points A, N et P soient alignés
$\Leftrightarrow$ $z^2 + z + 1$ est réel (d'après la question 3)
$\Leftrightarrow$ la partie imaginaire de $z^2 + z + 1$ est nulle
$\Leftrightarrow$ $2xy + y = 0$
$\Leftrightarrow$ $y(2x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow$ $y = 0$ ou $2x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow$ $y = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

L'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés est donc la réunion des deux droites d'équations $y = 0$ et $x = -\frac{1}{2}$ privée de l'origine.

b. Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

Voir le graphique ci-dessous.



Exercice 4 :
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n, par $p_n = n^2 - 42n + 4$.
   Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

   > $p_{22} = 22^2 - 42 \times 22 + 4 = -436$ et $p_{23} = 23^2 - 42 \times 23 + 4 = -433$
   > $p_{22} < p_{23}$ donc la suite (p_n) n'est pas décroissante.
   > **Affirmation 1 fausse**

2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
   - $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
   - $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

   Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.

   > Pour tout n, $v_n = u_n^2 - 1$ donc $u_n^2 = v_n + 1$.
   > $v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \left(\frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}\right)^2 - 1 = \frac{1}{9}\left(u_n^2 + 8\right) - 1 = \frac{1}{9}u_n^2 + \frac{8}{9} - 1 = \frac{1}{9}(v_n + 1) - \frac{1}{9}$
   > $= \frac{1}{9}v_n + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}v_n$
   > Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{9}$.
   > **Affirmation 2 vraie**

3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n, $n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2+n$.
Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

> Pour tout n non nul,
> $$n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2+n \iff \frac{n^2}{(n+1)^2} \leqslant w_n \leqslant \frac{n^2+n}{(n+1)^2}$$
> $$\iff \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \leqslant w_n \leqslant \frac{n^2+n}{n^2+2n+1}$$
> $$\iff \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \leqslant w_n \leqslant \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$
> $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$.
> D'après le théorème des gendarmes, on peut en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.
> Donc la suite (w_n) converge.
> **Affirmation 3 vraie**

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n}$.

1. $U_1 = \frac{2U_0}{1+U_0} = \frac{2\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

2. On va démontrer par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété $\mathscr{P}_n$: $U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

- **Initialisation**
  Pour $n=0$, $\frac{2^n}{1+2^n} = \frac{2^0}{1+2^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = U_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie pour un entier naturel n quelconque ; on va démontrer que la propriété est vraie au rang $n+1$.
  $$U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n} = \frac{2\frac{2^n}{1+2^n}}{1+\frac{2^n}{1+2^n}} = \frac{2\times 2^n}{1+2^n} \times \frac{1+2^n}{1+2^n+2^n} = \frac{2^{n+1}}{1+2\times 2^n} = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$$
  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

3. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$u \leftarrow \frac{1}{2}$ $i \leftarrow 0$ Tant que $i < n$ $u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ $i \leftarrow i+1$ Fin Tant que	$u \leftarrow \frac{1}{2}$ Pour i allant de 0 à n $u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ Fin Pour	$p \leftarrow 2^n$ $u \leftarrow \frac{p}{p+1}$

Dans l'algorithme 2, le nombre i varie entre 0 et n donc prend $n+1$ valeurs; la valeur de u en sortie est donc U_{n+1}. L'algorithme 2 ne convient donc pas.

Exercice 4 : **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par

$$a_n = \frac{4^{2n+1}+1}{5}.$$

1. • $a_2 = \dfrac{4^{4+1}+1}{5} = \dfrac{4^5+1}{5} = \dfrac{1025}{5} = 205$;

• $a_3 = \dfrac{4^{6+1}+1}{5} = \dfrac{4^7+1}{5} = \dfrac{16384+1}{5} = 3277$

2. Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{4^{2(n+1)+1}+1}{5} = \dfrac{4^{2n+3}+1}{5} = \dfrac{4^{(2n+1)+2}+1}{5} = \dfrac{4^{2n+1}\times 4^2+1}{5} = \dfrac{4^{2n+1}\times 4^2+16-15}{5} = \dfrac{4^{2n+1}\times 4^2+16-15}{5} = \dfrac{16\times 4^{2n+1}+16-15}{5} = 16\dfrac{4^{2n+1}+1}{5} - \dfrac{15}{5} = 16a_n - 3.$

3. • Par récurrence :

– $a_0 = 1$: la propriété est vraie au rang zéro;

– Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$; alors $16a_n \in \mathbb{N}$ et d'après le résultat précédent

$16a_n - 3 = a_{n+1} \in \mathbb{N}$.

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $a_n \in \mathbb{N}$ pour tout naturel.

• Les puissances paires de 4 se terminent par 6 et les puissances impaires par 4, donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, 4^{2n+1} se termine par 4 et donc $4^{2n+1}+1$ se termine par 5 et est donc multiple de 5 : a_n est donc un naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Dans cette question on utilise l'égalité de la question **2.** afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n).

a. Tout diviseur commun à a_n et à a_{n+1} et un diviseur commun à $16a_n$ et à a_{n+1}, donc est un diviseur de la différence $16a_n - a_{n+1} = 3$. Or 3 a deux diviseurs 1 et 3.

Conclusion : tout diviseur commun à a_n et à a_{n+1} et en particulier le plus grand est un diviseur de 3, donc est 1 ou 3.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $16 \equiv 1\,[3]$ et $-3 \equiv 0\,[3]$, donc $16a_n \equiv a_n\,[3]$ donc finalement $16a_n - 3 = a_{n+1} \equiv a_n[3]$.

c. On a $a_0 = 1$ et on a bien $1 \equiv 1\,[3]$.

Initialisation : le résultat précédent signifie que a_0 n'est pas divisible par 3.

Hérédité : supposons que a_n n'est pas divisible par 3 pour $n \in \mathbb{N}$; alors $16a_n$ n'est pas divisible par 3 (puisque 16 ne l'est pas) et comme 3 est divisible 3, $16a_n - 3 = a_{n+1}$ n'est pas divisible par 3.

La propriété est vraie au rang zéro, et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence a_n n'est pas un multiple de 3 pour $n \in \mathbb{N}$.

d. On a vu à la question **4. a.** que le plus grand commun diviseur d_n à a_n et à a_{n+1} était 1 ou 3. Comme on vient de voir que ce n'est pas 3, c'est donc 1 : les naturels a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Remarque : cette égalité n'est pas difficile à démontrer puisqu'elle relève de l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$b_n c_n = \left(2^{n+1}\left(2^n - 1\right) + 1\right)\left(2^{n+1}\left(2^n + 1\right) + 1\right) = \left(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1\right)\left(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1\right) = \left(2^{2n+1} + 1 - 2^{n+1}\right)\left(2^{2n+1} + 1 + 2^{n+1}\right) = \left(2^{2n+1} + 1\right)^2 - \left(2^{n+1}\right)^2 = 2^{4n+2} + 2 \times 2^{2n+1} + 1 - 2^{2n+2} = \left(2^2\right)^{2n+1} + 2^{2n+2} - 2^{2n+2} + 1 = 4^{2n+1} + 1 = 5a_n$.

5. **a.** On a donc pour $n \geqslant 2$, $\quad 5a_n = b_n c_n$. De deux choses l'une :

- ou 5 ne divise pas b_n ; comme 5 est premier et donc premier avec b_n, 5 divise le produit $b_n c_n$ et est premiers avec b_n : d'après le théorème de Gausse 5 divise c_n ;
- ou 5 divise b_n et alors le résultat est acquis.

b. $b_n = 2^{n+1}\left(2^n - 1\right) + 1$, donc $n \geqslant 2 \Rightarrow 2^n \geqslant 2^2 \Rightarrow 2^n - 1 \geqslant 3$; d'autre part $n \geqslant 2 \Rightarrow n+1 \geqslant 3 \Rightarrow 2^{n+1} \geqslant 2^3$, d'où par produit

$2^{n+1}\left(2^n - 1\right) \geqslant 3 \times 8$ et enfin $b_n \geqslant 25 > 5$.

De mà^a^me $c_n = 2^{n+1}\left(2^n + 1\right) + 1$

$n \geqslant 2 \Rightarrow 2^n \geqslant 2^2 \Rightarrow 2^n + 1 \geqslant 5$; d'autre part $n \geqslant 2 \Rightarrow n+1 \geqslant 3 \Rightarrow 2^{n+1} \geqslant 2^3$, d'où par produit

$2^{n+1}\left(2^n - 1\right) \geqslant 5 \times 8$ et enfin $c_n \geqslant 40 > 5$.

c. On a $a_n = \dfrac{b_n c_n}{5}$.

Donc $a_n = \dfrac{b_n}{5} \times c_n$ ou $a_n = \dfrac{c_n}{5} \times b_n$.

D'après les questions précédentes $\dfrac{b_n}{5}$ ou $\dfrac{c_n}{5}$ est un naturel au moins égal à 2 puisque b_n et c_n sont supérieurs à 5 et que l'un au moins est un multiple de 5.

a_n est donc le produit de deux naturels différents de 1 : il n'est donc pas premier.