BACCALAURÉAT BLANC
MATHÉMATIQUES
– SÉRIE S –

Samedi 18 janvier 2020

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Les calculatrices électroniques de poches sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Les calculatrices disposant d'un mode examen seront mises en mode examen au début de l'épreuve.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : **5 points**
Commun à tous les candidats

Toutes les probabilités seront arrondies si besoin à 10^{-3} près.
Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match.

Partie A

La chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match. On dispose des informations suivantes :
- 56% des téléspectateurs ont regardé le match.
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission ;
- 16,2% des téléspectateurs ont regardé l'émission.

On interroge au hasard un téléspectateur. On note les évènements :
- M : « le téléspectateur a regardé le match » ;
- E : « le téléspectateur a regardé l'émission ».

On note x la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission sachant qu'il n'a pas regardé le match.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Déterminer la probabilité de $M \cap E$.

3. a. Vérifier que $P(E) = 0{,}44\,x + 0{,}14$.
b. En déduire la valeur de x.

4. Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission. Quelle est la probabilité qu'il ait regardé le match ?

Partie B

Le match sur la chaîne de télévision a été regardé par 56% des téléspectateurs. Devant ces excellentes audiences, la chaîne demande à une entreprise de démarcher des téléspectateurs par téléphone pour leur proposer un abonnement à un bouquet de chaînes payantes comprenant plusieurs chaînes de sport. L'entreprise appelle 300 personnes au hasard et s'assure à chaque fois qu'elles ont regardé la télévision la soirée du match.

On considère que le nombre de téléspectateurs est si grand que le choix des téléspectateurs peut être assimilé à un tirage avec remise. On appelle X le nombre de téléspectateurs ayant regardé le match.

1. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2. Quelle est la probabilité que l'entreprise appelle exactement 150 téléspectateurs ayant regardé le match ?

3. Calculer $P(150 \leqslant X \leqslant 175)$.

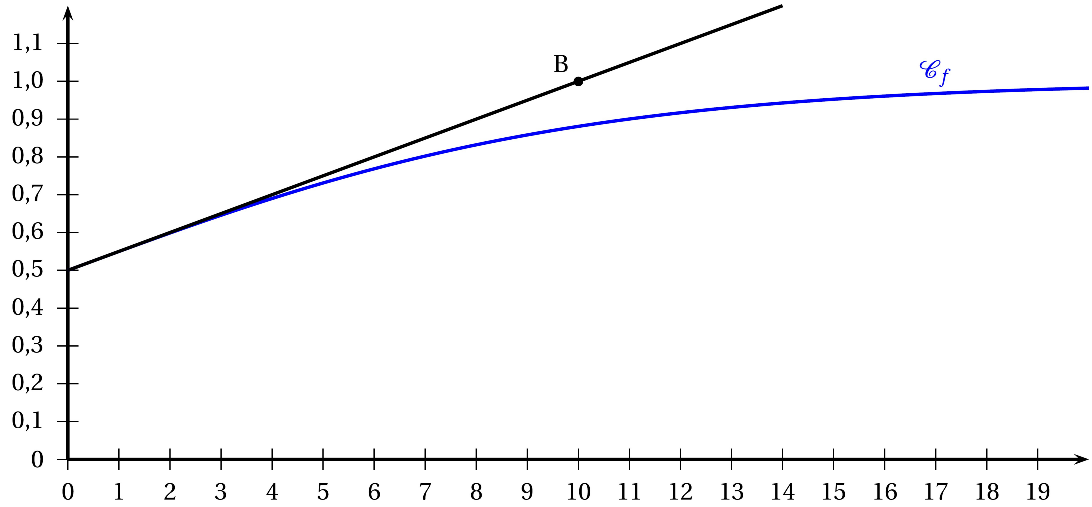
Exercice 2 : **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soient a et b des nombres réels. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+e^{-bx}}.$$

La courbe C_f représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe C_f passe par le point $A(0\,;0{,}5)$.
La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point $B(10\,;1)$.



1. Justifier que $a=1$. On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-bx}}$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$.

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\,;+\infty[$ par $p(x) = \dfrac{1}{1+e^{-0{,}2x}}$.

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000. Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3{,}5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.

2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\,;+\infty[$.
b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

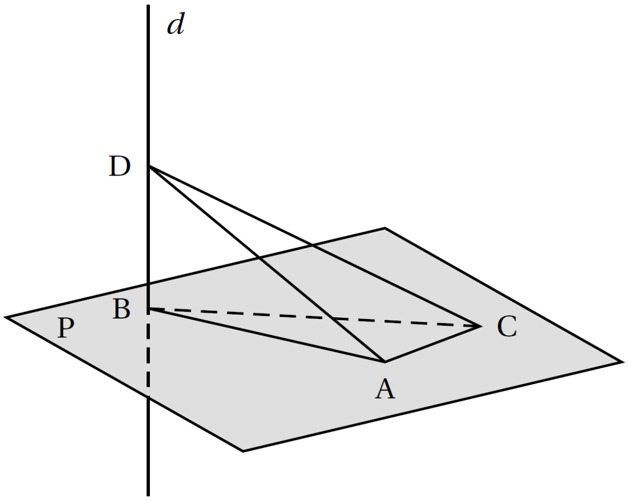
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95%, le marché est saturé.
Déterminer, en expliquant la démarche et à l'aide d'une inéquation ou de la table de votre calculatrice, l'année au cours de laquelle cela se produit.

Exercice 3 : **5 points**
Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Dans un plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A.
Soit d la droite orthogonale au plan P et passant par le point B. On considère un point D de cette droite distinct du point B.



1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

On appelle *bicoin* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.
2. Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est un bicoin.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0;\vec{u},\vec{v})$. Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes 1, z^2 et $\dfrac{1}{z}$ soient alignés.
On note A le point d'affixe 1.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2+z+1=0$.

Soit z un nombre complexe non nul. On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.
2. Établir que, pour tout nombre complexe z différent de 0, on a :

$$z^2-\frac{1}{z} = (z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right).$$

3. On rappelle que si $\vec{U}$ est un vecteur non nul et $\vec{V}$ un vecteur d'affixes respectives $z_{\vec{U}}$ et $z_{\vec{V}}$, les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $z_{\vec{V}}=k\,z_{\vec{U}}$.
En déduire que, pour $z\neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si z^2+z+1 est un réel.

4. On pose $z=x+i\,y$, où x et y désignent des nombres réels.
Justifier que : $z^2+z+1 = x^2-y^2+x+1+i(2xy+y)$.

5. **a.** Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z\neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.
b. Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

Exercice 4 : **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte, une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n, par

$$p_n = n^2 - 42n + 4.$$

Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

- $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
- $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.

3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n,

$$n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n.$$

Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + U_n}.$$

1. Calculer U_1 que l'on écrira sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$U_n = \frac{2^n}{1 + 2^n}.$$

3. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution. Déterminer lequel en justifiant votre choix.

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
$u \leftarrow \frac{1}{2}$ $i \leftarrow 0$ Tant que $i < n$ $u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ $i \leftarrow i + 1$ Fin Tant que	$u \leftarrow \frac{1}{2}$ Pour i allant de 0 à n $u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ Fin Pour	$p \leftarrow 2^n$ $u \leftarrow \frac{p}{p+1}$

Exercice 4 : **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice sera traité sur une copie séparée.

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par

$$a_n = \frac{4^{2n+1}+1}{5} .$$

1. Calculer a_2 et a_3 .

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 16 a_n - 3$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n , a_n est un nombre entier naturel.

4. Dans cette question, on utilise l'égalité de la question 2. afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n) .

a. Pour tout entier naturel n , on note d_n le plus grand diviseur commun de a_n et a_{n+1} .
Démontrer que, pour tout entier naturel n , d_n est égal à 1 ou à 3.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} \equiv a_n \; [3]$.

c. Vérifier que $a_0 \equiv 1 \; [3]$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , le nombre a_n n'est pas divisible par 3.

d. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n , a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

5. L'objectif de cette question est de démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le nombre a_n n'est pas premier.
On pose, pour tout entier naturel n ,

$$b_n = 2^{n+1}(2^n - 1) + 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2^{n+1}(2^n + 1) + 1 .$$

On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$5 a_n = b_n c_n .$$

a. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

5 divise b_n ou 5 divise c_n .

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que $b_n > 5$ et $c_n > 5$.

c. En déduire que a_n n'est pas un nombre premier.

Annexe (à détacher et à rendre avec la copie)