

(4pts) Ex 1 *

1,5

1.) Il y a 3 allèles différents, donc le nombre de couples d'allèles est $3^2 = 9$.

1,5

2.) On cherche le nombre de combinaisons de 2 éléments de E qui en compte 3. C'est donc $\binom{3}{2} = 3$.

Ce sont $\{A, B\}$, $\{A, O\}$ et $\{B, O\}$. (non demandé)

1

3.) Il y a 3 homozygotes, $\{A, A\}$, $\{B, B\}$ et $\{O, O\}$.
Donc au total il y a 6 génotypes différents.

(2pts) Ex 2

0,25

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\forall x > 0, (1+x)^n \geq 1+nx)$ (B.m.).

Initialisation: Pour $n=0$, $(1+x)^0 = 1$
et $1+0x = 1+0 = 1$

On a bien $1 \geq 1$, donc B(0) est vraie.

Hérédité: Soit $m \in \mathbb{N}$ tq B(m) soit vraie.

$$\forall x > 0, (1+x)^m \geq 1+mx \quad (*)$$

$$\text{Soit } x > 0. \quad (*) \Rightarrow \underbrace{(1+x)}_{\geq 1 > 0} (1+x)^m \geq \underbrace{(1+x)}_{\geq 1 > 0} (1+mx)$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^{m+1} \geq 1+mx+mx+x+mx^2$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^{m+1} \geq 1+(m+1)x + \underbrace{mx^2}_{\geq 0}$$

Donc par transitivité, $(1+x)^{m+1} \geq 1+(m+1)x$.

Et B(m+1) est vraie.

0,25

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

(5pts) Ex 3

0,25

1.) Montrons par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n+1$ (P_n).

Initialisation: Pour $n=0$, $2^0 = 1$ et $n+1 = 0+1 = 1$.

On a $1 \geq 1$, donc (P₀) est vraie.

Hérédité: Soit $m \in \mathbb{N}$ tq (P_m) vraie.

$$2^m \geq m+1$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 2^m \geq 2(m+1)$$

1,5

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2^{m+1} \geq 2m+2 \\
&\Leftrightarrow 2^{m+1} \geq m+2 + \underbrace{m}_{\geq 0} \\
&\Rightarrow 2^{m+1} \geq m+2 \quad (\text{par transitivité}) \\
&\Leftrightarrow 2^{m+1} \geq (m+1) + 1
\end{aligned}$$

Et P_{m+1} vraie.

0.5

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n+1$.

2.a) L'ensemble E , si on le note $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ possède au moins les parties constituées de l'ensemble vide $\emptyset$ et des n singletons $\{x_i\}, i \in \{1, \dots, n\}$. Il possède donc au moins $n+1$ parties distinctes.

2.b) $\#E = n$, donc d'après le cours $\#P(E) = 2^n$.

2.c) $P(E)$ contient au moins $\{\emptyset; \{x_1\}; \{x_2\}; \dots; \{x_n\}\}$.
Donc $\#P(E)$ est supérieur ou égal à
 $\# \{\emptyset; \{x_1\}; \{x_2\}; \dots; \{x_n\}\}$
i.e. $2^n \geq (n+1)$.

(5pts) Ex 4

1) L'expression est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{(e^{-2x})^3 e^{4x}}{e^{-6x} e^{4x} e^{2x}} \\
&= \frac{e^{-6x}}{e^{-6x} e^{4x} e^{2x}} \\
&= e^{-6x+6x-2x} \\
&= e^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

1
0.5
5.100.5

2°) L'expression est définie sur $\mathbb{R}$, sauf par les valeurs de x qui annulent le dénominateur.

$$e^{-x} + 3 = 0$$

$\Leftrightarrow e^{-x} = -3$, impossible car une exponentielle est toujours positive. Donc l'expression est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \frac{2}{e^{-x} + 3}$$

1
(0.75 m)
(pas de vérif. J)

$$\Leftrightarrow e^x (e^{-x} + 3) = 2$$

$$\Leftrightarrow e^x e^{-x} + 3e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow 3e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln 3$$

$$S = \{-\ln 3\}$$

la fonction $\ln$ / la fonction exp sont bijectives.

Passe au log facultatif

3°) L'expression est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$e^{2x} - e^{x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} < e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2x < x+1$$

$$\Leftrightarrow x < 1$$

$$S =]-\infty; 1]$$

la fonction exponentielle est strictement croissante

1.5
0.5 m
 $e^a - e^b < 0$
 $\Rightarrow a - b < 0$

4°) $f: x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = (6-3x)e^{2x}$

En tant que produit de polynôme et d'exponentielle, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6-3x)' \times e^{2x} + (6-3x) \times e^{2x}' \\ &= -3e^{2x} + (6-3x) \times 2e^{2x} \end{aligned}$$

1.5

$$f'(x) = (-3 + 12 - 6x) e^{2x}$$

$$f'(x) = (-6x + 9) e^{2x}$$

Il est toujours préférable de conserver l'écriture factorisée car on en étudiera généralement le signe.
 (Ici, comme l'exponentielle est positive, $f'(x)$ est du signe de $(-6x + 9) = 3(-2x + 3)$).

(L'apb) Ex 5

$$x = 9 \Rightarrow x^2 = 81$$

$$A \Rightarrow B$$

1

1°) Contraire: $\text{non } B \Rightarrow \text{non } A$

$$x^2 \neq 81 \Rightarrow x \neq 9$$

1,5

2°) Négation: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non } A \text{ ou } B)$

donc $\text{non}(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \text{non}(\text{non } A \text{ ou } B)$

$\Leftrightarrow A \text{ et non } B$

$$x = 9 \text{ et } x^2 \neq 81$$

1,5

3°) Réciproque: $B \Rightarrow A$

$$x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$$

Cette réciproque est fautive; $x^2 = 81 \Rightarrow (x = 9 \text{ ou } x = -9)$.