

DEVOIR SURVEILLÉ N° 02

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet est composé de plusieurs exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 pts) On considère la suite (u_n) définie par $u_2 = 1$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_n$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $0 \leq u_n \leq 1$.
(b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n)
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $u_n = \frac{n}{2(n-1)}$
En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 2 (2 pts) Mettre sous forme canonique en détaillant les calculs pour prouver que vous n'avez pas utilisé une "formule apprise par cœur" :

$$2x^2 - 6x + 5$$

Exercice 3 (4 pts) A la loterie nationale, on dispose de deux urnes. La première contient 49 boules bleues numérotées de 1 à 49, et la seconde 10 boules rouges numérotées de 1 à 10.

On tire d'abord successivement et sans remise cinq boules de la première urne, puis une boule de la seconde.

Un tirage est ainsi constitué de six numéros.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. La loterie propose le tableau de gains suivant :

Bons numéros	Gain en euros
5 bleus et 1 rouge	5 000 000
5 bleus	100 000
4 bleus et 1 rouge	1 000
4 bleus	500

- (a) Combien a-t-on de chances de gagner 5 000 000 euros ?
- (b) Combien a-t-on de chances de gagner 500 euros ?

Exercice 4 (10 pts)

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1^{er} juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n) . Selon ce modèle, pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3\,000$.

1. Justifier que $u_1 = 2\,926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1\,520$.
(b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on en déduire ?
4. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1\,520$.
(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,95$ dont on précisera le premier terme.
(b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1\,480 \times 0,95^n + 1\,520$.
(c) Étudier la convergence de la suite (u_n) .
5. La réserve marine va fermer ! Avec la calculatrice , déterminer l'année de la fermeture en expliquant votre démarche.