NE RIEN ÉCRIRE

Examen ou concours : Série* :

Spécialité/option : Terminale - Spécialité.

Repère de l' épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :

(Préciser, s'il y a lieu, le sujet choisi)

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles intercalaires dans le bon sens.

Note : /20

Appréciation du correcteur (uniquement s'il s'agit d'un examen) :

DS02 - Corrigé (1/2)

* Uniquement s'il s'agit d'un examen.

Ex 1 (u_n) : $\begin{cases} u_2 = 1 \\ \forall n \geq 2, \quad u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_n \end{cases}$

1°) a) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq 1$ (P_n)

Initialisation : Pour $n = 2$, $u_2 = 1$, et $0 \leq 1 \leq 1$, donc (P_2) est vraie.

Hérédité : Supposons (P_n) vraie pour un certain $n \geq 2$ (H.R.).

$0 \leq u_n \leq 1$ $(*)$

Par ailleurs, $n \geq 2 \Rightarrow n^2 \geq 4$ (la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$)

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4}$ (la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^+$)

$\Rightarrow 0 > -\frac{1}{n^2} \geq -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 1 > 1 - \frac{1}{n^2} \geq \frac{3}{4} > 0$ $(**)$

En multipliant $(*)$ membre à membre, il vient :

$0 \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_n \leq 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$

D'où $0 \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_n \leq 1$

i.e. $0 \leq u_{n+1} \leq 1$, donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq 1$, la suite est bornée.

b) $\forall n \geq 2$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n^2} < 1$ (voir $**$)

donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2°) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

3°) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 2$, $u_n = \dfrac{n}{2(n-1)}$ (P_n).

Initialisation : Pour $n = 2$, $\dfrac{2}{2(2-1)} = \dfrac{2}{2 \times 1} = \dfrac{2}{2} = 1 = u_2$

donc (P_2) est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \geq 2$, (P_n) soit vraie (H.R.).

$$u_n = \frac{n}{2(n-1)}$$

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_n$$

$$\overset{H.R.}{=} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{n}{2(n-1)}\right)$$

$$= \frac{n^2 - 1}{n^2} \times \frac{n}{2(n-1)}$$

$$= \frac{n(n^2-1)}{n^2 \times 2 \times (n-1)}$$

$$= \frac{\cancel{n}(n+1)\cancel{(n-1)}}{\cancel{n} \times n \times 2 \times \cancel{(n-1)}}$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

$$= \frac{n+1}{2((n+1)-1)}$$ donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 2$, $\boxed{u_n = \dfrac{n}{2(n-1)}}$.

En tant que fraction rationnelle,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2n-2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2n} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

N° 2./5.

Ex 2) Forme canonique.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$2x^2 - 6x + 5$

$= 2(x^2 - 3x) + 5$

$= 2\left[x^2 - 2 \times x \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + 5$

$= 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2\right] - 2 \times \frac{9}{4} + 5$

$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + \frac{10}{2}$

$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$, où $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$.

Ex 3) Combinatoire

1°) On tire 5 boules bleues parmi 49 boules, il y a

$\binom{49}{5} = \frac{49!}{44! \times 5!} = 1906884$

On tire 1 boule rouge parmi 10 boules, il y a 10 possibilités.

Il y a donc au total $1906884 \times 10 = 19068840$ tirages possibles.

2°a) D'après ce qui précède, on a 1 chance sur 19068840 de gagner 15 000 000 €.

2°b) Nombres de tirages permettant de gagner 500 € :
Il faut choisir 4 boules bleues parmi les 5 gagnantes, $\binom{5}{4} = 5$; il reste à choisir :
- le 5° numéro bleu, 44 possibilités (5 numéros sont "gagnants")
- le numéro rouge, 10 possibilités.

Il y a donc $5 \times 44 \times 10 = 2250$ tirages permettant de gagner 500 €.

Sur un nombre total de 19068840 tirages possibles, la probabilité de gagner 500 € est :

$\frac{2250}{19068840} = \frac{225}{1906884} = \boxed{\frac{75}{211876}}$

c'est-à-dire 75 chances sur 211876,

i.e. à peu près 1 chance sur 2825.

ne rien écrire dans la partie barrée

Ex 4.) (Extrait d'Antilles-Guyane 2018).

1°) On a $u_1 = (1-0{,}05) \times (u_0 + 80)$

$= 0{,}95 \times 3080$

$= \boxed{2926}$

2°) 80 cétacés arrivent dans la zone, on a donc $u_n + 80$ cétacés.
On perd ensuite 5% des cétacés, il reste $u_{n+1} = 0{,}95\,(u_n + 80)$

$u_{n+1} = \underline{0{,}95\,u_n + 76}$.

3°a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1520$ (P_n).

Initialisation : Pour $n=0$, $u_0 = 3000$ et $3000 \geq 1520$, donc (P_0) est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq (P_n) vraie. (H.R.)

$u_n \geq 1520$ (H.R.)

$\Leftrightarrow 0{,}95\,u_n \geq 1444$

$\Leftrightarrow \underline{0{,}95\,u_n + 76 \geq 1520}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} \geq 1520$ (Question 2°)

Donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie.

3°b) (Une récurrence est ici largement superflue).

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_{n+1} - u_n \overset{(2°)}{=} 0{,}95\,u_n + 76 - u_n$

$= -0{,}05\,u_n + 76$.

Or (3°a) $u_n \geq 1520$

$\Leftrightarrow -0{,}05\,u_n \leq -76$

$\Leftrightarrow \underline{-0{,}05\,u_n + 76 \leq 0}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$

$\Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$

La suite (u_n) est donc décroissante.

Comme elle est minorée par 1520, elle converge.

NE RIEN ÉCRIRE

Examen ou concours : Série* :

Spécialité/option :

Repère de l' épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :
(Préciser, s'il y a lieu, le sujet choisi)

Note : /20

Appréciation du correcteur (uniquement s'il s'agit d'un examen) :

DS n°2 - Corrigé - Suite (2/2)

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles intercalaires dans le bon sens.

* Uniquement s'il s'agit d'un examen.

4°a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 1520$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1520$$
$$= 0,95\, u_n + 76 - 1520$$
$$= 0,95\, u_n - 1444$$
$$= 0,95\,(u_n - 1520)$$
$$= 0,95\, v_n$$

(on peut aussi étudier $\frac{v_{n+1}}{v_n}$).

Donc la suite (v_n) est géométrique, de raison 0,95 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1520 = 1680$.

4°b) En tant que suite géométrique, la suite (v_n) a pour expression : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times (0,95)^n$

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 1520$

$\Leftrightarrow u_n = v_0 \times 0,95^n + 1520$

$\Leftrightarrow u_n = 1680 \times 0,95^n + 1520.$

4°c) On a $|0,95| < 1$, donc en tant que suite géométrique, $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 1520$, donc par somme $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1520$.

5°) La réserve ferme dès que $u_n < 2000$.

On calcule les termes à la calculatrice, et $u_{22} < 2000$ avec $u_{21} > 2000$. Donc la réserve fermera en 2039.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.