

DEVOIR SURVEILLÉ N° 03

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet est composé de plusieurs exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (13 pts) Une société agro-alimentaire fabrique des aliments pour le bétail. La production minimale est de 10 tonnes. On s'intéresse au bénéfice réalisé, en milliers d'euros, correspondant à la production d'une quantité de q dizaines de tonnes d'aliments.

On admet que ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B donnée par $B(q) = 10 - \frac{e^{0,2q+1}}{q}$.

1. Quel est le domaine de définition de B dans ce contexte ? Justifiez.
2. (a) Quel est le domaine de dérivabilité de B ? Justifiez.
 (b) Démontrez (détaillez les calculs - quand le résultat est donné dans l'énoncé, il ne rapporte aucun point-) que sur cet intervalle, $B'(q) = \frac{(1-0,2q)e^{0,2q+1}}{q^2}$.
 (c) Étudiez le signe de $B'(q)$ sur cet intervalle.
 (d) En déduire le tableau de variations de la fonction B sur cet intervalle.
3. Déterminez l'équation de la tangente à la courbe représentative de B au point d'abscisse 10, et en quel point cette tangente coupe l'axe des abscisses.
4. Quel est le montant en euros du bénéfice maximal que peut dégager la société ? Pour quelle quantité d'aliments ce bénéfice maximal est-il obtenu ?

Exercice 2 (7 pts) Le gazon d'un champ de $5000m^2$ est envahi par des pissenlits qui détruisent 20% de la surface en un an. Chaque automne, Catherine arrache $250m^2$ de pissenlits afin de semer de la pelouse.

On pose $p_0 = 5000$ la surface initiale en m^2 de pelouse et p_n la surface de pelouse à la fin de n années, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer la surface de pelouse au bout d'une et de deux années.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_{n+1} en fonction de p_n .
3. On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par $v_n = p_n - 1250$.
 (a) Déterminer la nature de la suite (v_n) , sa raison et son premier terme.
 (b) Donner l'expression du terme général v_n en fonction de l'entier n .
 (c) En déduire une expression de p_n en fonction de n .
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.