DEVOIR SURVEILLÉ N° 04

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet est composé de plusieurs exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (12 pts)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

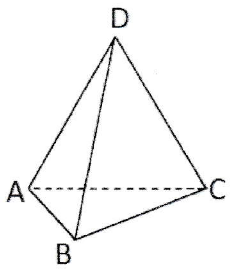
$$g(x) = e^x - x - 1$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et en déduire le signe de $g(x)$
2. Démontrer que, pour tout réel x , $(e^x - x) > 0$.

Partie B :

1. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes, et si oui lesquelles ?
2. Étudier le sens de variations de f, puis dresser son tableau de variations.
3. (a) Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   (b) A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite T_0.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite T_0 et les asymptotes dans un repère orthogonal. Utiliser le papier millimétré fourni, et prendre pour unité 2cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées.

Exercice 2 (8 pts)



On considère un tétraèdre ABCD et les points suivants :
R défini par $\vec{AR} = \frac{2}{3}\vec{AD}$, S défini par $\vec{BS} = \frac{1}{3}\vec{BD}$, et T défini par $\vec{BT} = \frac{1}{3}\vec{CB}$.
On note I le point d'intersection des droites (RS) et (AB).
On **admet** que $(A; \vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AD})$ forme un repère de l'espace, et on se place dans ce repère.

1. Déterminer les coordonnées des points R, S, et T dans ce repère.
2. (a) Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (RS) et (AB).

   (b) Démontrer que I a pour coordonnées $(\frac{4}{3}; 0; 0)$.
3. Démontrer que les droites (TI) et (AC) sont parallèles.
4. Soit P le point de l'espace tel que $DATP$ est un parallélogramme. démontrer que les plans (ADC) et (PIT) sont parallèles.

$f : x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$ est définie et dérivable en tant que composée de fraction rationnelle et d'exponentielle pour tout x tq $e^x \neq x$

(voir ci c'est fait au début de la partie B)

(on verra que $e^x > x$ et donc que f est définie dérivable sur $\mathbb{R}$).

Partie A :

$g : x \mapsto g(x) = e^x - x - 1$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de polynôme et d'exponentielle.

1°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - 1$.

$g'(x) > 0 \iff e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0$

$\iff x > 0$ (car l'exponentielle est strictement croissante)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$.

2°) Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1 > x$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$.

$(\iff e^x - x > 0)$.

Partie B : D'après ce qui précède, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$ donc $e^x \neq x$, et f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1°a) • limite en $-\infty$

$f(x) = \dfrac{x}{e^x - x} = \dfrac{x}{x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)}$; pour $x \neq 0$, ce qui est le cas au voisinage de $-\infty$, on a :

$f(x) = \dfrac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$ $(x \neq 0)$; par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0^-$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$.

Donc par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = -1$,

et par quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ (asymptote horizontale $y = -1$)

• <u>limite en $+\infty$</u>

Pour $x \neq 0$, ce qui est le cas au voisinage de $+\infty$,

$f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$. Or d'après le cours $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$,

donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = +\infty$,

et par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$ (asymptote horizontale $y = 0$)

1°b) On déduit de 1°a que C_f admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = -1$,
et en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

2°) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > x$ donc $e^x - x > 0$ et f est dérivable.

$$f'(x) = \frac{1 \times (e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{e^x - \cancel{x} - xe^x + \cancel{x}}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x - x)^2 > 0$ et $e^x > 0$,
donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$. ($f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$).

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	↗	$\dfrac{1}{e-1}$	↘	0

$f(1) = \dfrac{1}{e - 1}$

3°a) $T_0 \,/\, y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$

Or $f'(0) = \dfrac{e^0(1-0)}{(e^0-0)^2} = \dfrac{1 \times 1}{1^2} = 1$

$f(0) = \dfrac{0}{e^0 - 0} = \dfrac{0}{1-0} = 0$

Donc $T_0 \,/\, y = x$

3°b) Posons $h(x) = f(x) - x$.

$= \dfrac{x}{e^x - x} - x$

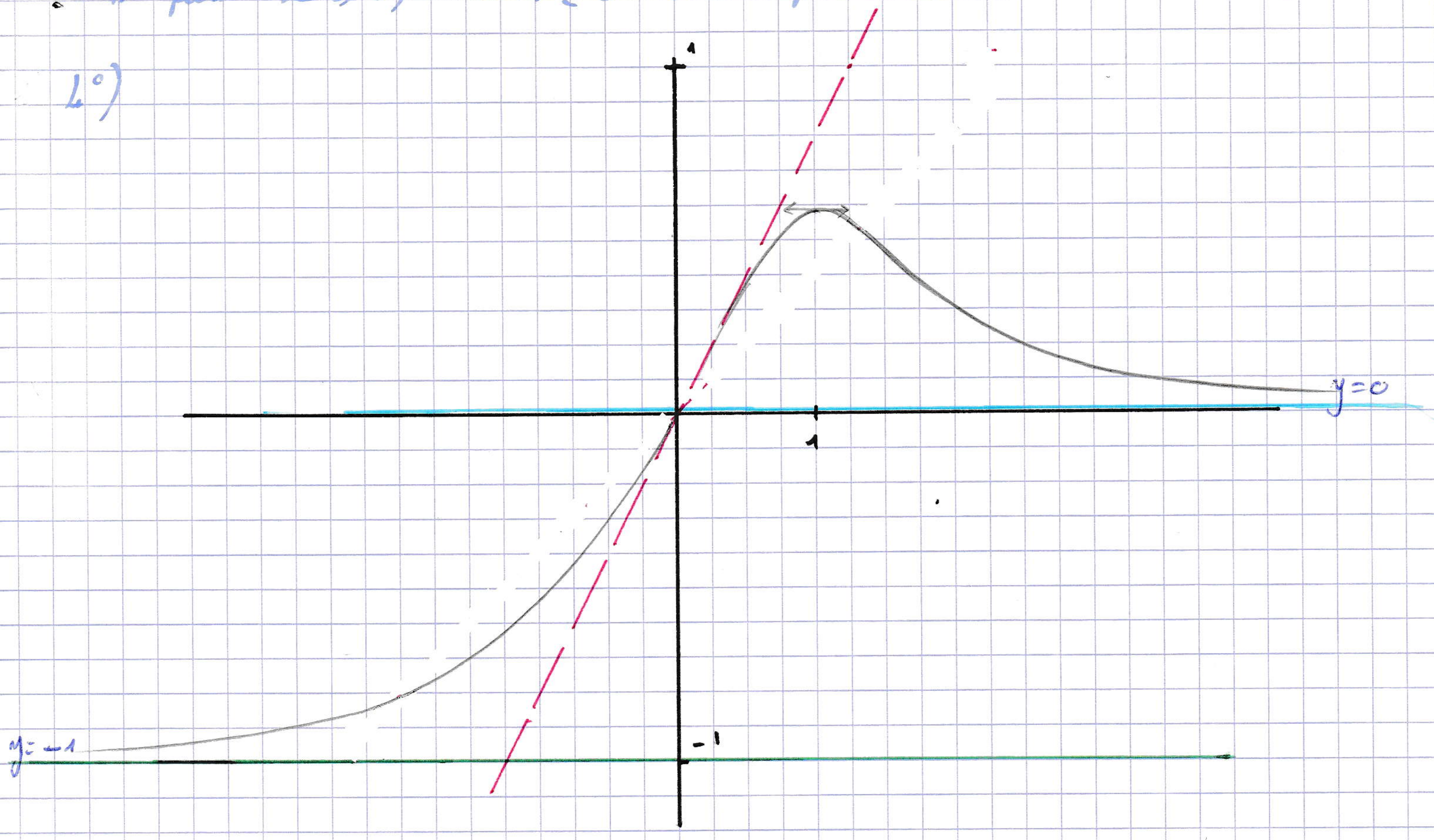
$= \dfrac{x - x(e^x - x)}{e^x - x} = \dfrac{x(1 - e^x + x)}{e^x - x}$

$h(x) = \dfrac{-x \times g(x)}{e^x - x}$, or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$
$g(x) \geq 0$

donc $h(x)$ est du signe opposé à x :

pour $x \leq 0$, $h(x) \geq 0$ et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T_0
pour $x \geq 0$, $h(x) \leq 0$ et $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de T_0.

4°)



Dans un Tétraèdre ABCD, soient : R tq $\vec{AR} = \frac{2}{3}\vec{AD}$

S tq $\vec{BS} = \frac{1}{3}\vec{BD}$

T tq $\vec{BT} = \frac{1}{3}\vec{CB}$

$\{I\} = (RS) \cap (AB)$

On se place dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AD})$.

1°) • $\vec{AR} = 0\vec{AB} + 0\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AD}$

donc les coordonnées de R dans le repère donné sont $R(0; 0; \frac{2}{3})$

• $\vec{AS} = \vec{AB} + \vec{BS} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BD} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{AD}$

$= \vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB} + 0\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AD}$

donc $S(\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3})$

• $\vec{AT} = \vec{AB} + \vec{BT} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{CB} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{CA} + \frac{1}{3}\vec{AB}$

$= \frac{4}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + 0\vec{AD}$

donc $T(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; 0)$

2°) a) • (RS) passe par $R(0; 0; \frac{2}{3})$

et a pour vecteur directeur $\vec{RS}\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - 0 & = \frac{2}{3} \\ 0 - 0 & = 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3} & = -\frac{1}{3} \end{vmatrix}$

Donc une représentation paramétrique de (RS) est :

$$(RS) \begin{cases} x = 0 + \frac{2}{3}t \\ y = 0 + 0t \\ z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{i.e. } (RS) \begin{cases} x = \frac{2}{3}t \\ y = 0 \\ z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

• (AB) passe par $A(0; 0; 0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{AB}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Donc $(AB) \begin{cases} x = t' \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$ (C'est l'axe des abscisses).

b) $\{I\} = (RS) \cap (AB)$.

Posons $I(x_I ; y_I ; z_I)$.

$\exists t, t' \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} x_I = \frac{2}{3}t = t' & (1) \\ y_I = 0 & (2) \\ z_I = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t = 0 & (3) \end{cases}$$

D'après (1), $t' = \frac{2}{3}t$. (*)

D'après (2), $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}t = 0$

$\frac{1}{3}t = \frac{2}{3}$

donc $t = 2$

Dans (*), il vient $t' = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$.

Donc $\begin{cases} x_I = 4/3 \\ y_I = 0 \\ z_I = 0. \end{cases}$, $I\left(\frac{4}{3} ; 0 ; 0\right)$. (C'est bien le résultat attendu).

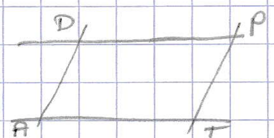
3°) Un vecteur directeur de (TI)

est $\vec{TI} \begin{vmatrix} \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0 \\ 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = 1/3 \\ 0 - 0 = 0 \end{vmatrix}$

Un vecteur directeur de (AC)

est $\vec{AC} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$.

On a donc $\vec{TI} = \frac{1}{3}\vec{AC}$, ces vecteurs directeurs sont colinéaires, donc les droites sont parallèles.



4°) DATP est un parallélogramme ssi $\vec{AD} = \vec{TP}$

Une base d'un plan est formée par deux vecteurs non colinéaires de ce plan, donc $(\vec{AC} ; \vec{AD})$ est une base de (ADC)

et $(\vec{TI} ; \vec{TP})$ est une base de (PIT).

Or $\vec{TI} = \frac{1}{3}\vec{AC}$ et $\vec{TP} = \vec{AD}$, donc ces deux plans sont parallèles.