Exercice 2

Partie A

$$f :]-1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+2x-5}{2(x+1)^2}$$

En tant que fraction rationnelle, f est déf, cont, dér. sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

1°) Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$a + \frac{b}{2(x+1)^2} = \frac{2a(x+1)^2+b}{2(x+1)^2} = \frac{2a(x^2+2x+1)+b}{2(x+1)^2}$$
$$= \frac{2ax^2+4ax+2a+b}{2(x+1)^2}$$

Par identification, $a + \frac{b}{2(x+1)^2} = f(x)$ ssi :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 4a = 2 \\ 2a+b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -5 - 2\times\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a = 1/2} \\ \boxed{b = -6} \end{cases}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{f(x) = \frac{1}{2} - \frac{6}{2(x+1)^2}} = \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{3}{(x+1)^2}}_{\text{non demandé}}$.

2°) Par suite l'ensemble des primitives de f sur I est :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{x+1} + k}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Brouillon :
$(x+1)^{-1}$ '
$= -1 \times 1 \times (x+1)^{-2}$
$= \frac{-1}{(x+1)^2}$
Donc $[3 \times (x+1)^{-1}]'$
$= \frac{-3}{(x+1)^2}$

Partie B

$(u_n) \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n), \end{cases} \quad f : x \longmapsto 0{,}15x^2 + 0{,}4x.$

1°) En tant que polynôme, f est définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \times 0{,}15x + 0{,}4 = \underline{0{,}3x + 0{,}4}$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0{,}3x + 0{,}4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{-0{,}4}{0{,}3} \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$

Donc en particulier f est croissante sur $\mathbb{R}_+$

2°) ⚠ f croissante n'implique pas nécessairement (u_n) croissante !

B2°- suite) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons (P_n) : $0 < u_{n+1} < u_n < 4$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, (P_n) vraie.

(I) Pour $n=0$, $u_0 = 3$

$u_1 = f(3) = 0{,}15 \times 9 + 0{,}4 \times 3 = 2{,}55$,

donc on a bien $0 < 2{,}55 < 3 < 4$, (P_0) vraie.

(H) Supposons (P_n) vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

$$0 < u_{n+1} < u_n < 4.$$

On a vu que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc en particulier sur $[0;4]$.

Ainsi on peut appliquer f à l'inégalité ci-dessus sans en changer le sens. (Pensez à se servir des questions précédentes !)

$$f(0) < f(u_{n+1}) < f(u_n) < f(4)$$

Attention, si on veut "passer au carré dans l'inégalité", il faut justifier que la f° carré est ↗ sur $\mathbb{R}^+$

Or $f(0) = 0$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, $f(u_n) = u_{n+1}$,

et $f(4) = 0{,}15 \times 16 + 0{,}4 \times 4 = 4$

D'où $0 < u_{n+2} < u_{n+1} < 4$, (P_{n+1}) est vraie.

(C) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n < 4$.

3°) D'après l'inégalité ci-dessus, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite finie ℓ.

f est continue, donc d'après le théorème du point fixe ℓ vérifie :

$$f(\ell) = \ell$$

$$\Leftrightarrow 0.15\ell^2 + 0.4\ell = \ell$$

$$\Leftrightarrow 0{,}15\ell^2 - 0{,}6\ell = 0 \quad \text{(on peut calculer } \Delta \text{... ou pas !)}$$

$$\Leftrightarrow \ell(0{,}15\ell - 0{,}6) = 0$$

Produit nul : $\ell = 0$ ou $0{,}15\ell - 0{,}6 = 0$

$\ell = \dfrac{0{,}6}{0{,}15} = 4$

NB. : On avait trouvé les points fixes de f dans le calcul correspondant à l'hérédité (B2°)

Comme (u_n) est décroissante, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Partie C $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3x^2 + 9x + 6}$

En tant que fraction rationnelle, f est définie, continue, dérivable sauf pour les valeurs de x qui annulent son dénominateur.

$$3x^2 + 9x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + 3x + 2) = 0 \qquad (3 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \times 1 \times 2 = 1$$

+1

$$x_1 = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Donc f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; -2\}$.

$\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \dfrac{-[6x + 9]}{(3x^2 + 9x + 6)^2}$

$$f'(x) = \frac{-3(2x+3)}{(3x^2 + 9x + 6)^2}$$