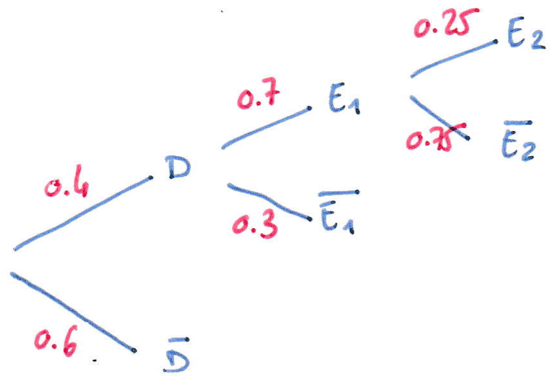
Terminale spécialité - DS n°6

Ex 1

1.a]



2

1.b] $P(E_1) = 0,4 \times 0,7 = \boxed{0,28}$

1

1.c]
$$P(F) = P(\bar{D}) + P(D \cap \bar{E_1}) + P(D \cap E_1 \cap \bar{E_2})$$
$$= 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75$$
$$= \boxed{0,93}$$

2

1 **2.a]** On a une expérience aléatoire à deux issues, qui est répétée de manière indépendante. Donc $X \sim \mathcal{B}(5 ; 0,07)$

2 **2.b]** $P(X = 2) \simeq 0,039$ (à 10^{-3} près)

3] Pour $n = 95$, $P(X \geqslant 1) \simeq 0,9989$ (ou en passant au log)
Pour $n = 96$, $P(X \geqslant 1) \simeq 0,99057$

1

Le nombre minimal de drones est $\boxed{96}$.

Ex 2

1] Principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.
Si l'on projette cette égalité sur l'axe
Ici, $\vec{E} + \vec{F} = m\vec{a}$.
horizontal, il vient : $\|\vec{E}\| - \|\vec{F}\| = m\|\vec{a}\|$
(car l'orientation du vecteur $\vec{F}$ est dans le sens négatif).

1

i.e. $36\,000\,000 - 240\,000\,\|\vec{v}(t)\| = m\,\|\vec{a}(t)\|$.
$36\,000\,000 - 240\,000\,x'(t) = m\,x''(t)$, $m = 48000$ kg.

$$\boxed{48\,000\,x''(t) + 240\,000\,x'(t) = 36\,000\,000}$$

2.a On a $v(t) = x'(t)$.

(E) : $48000\ x''(t) + 240000\ x'(t) = 360\,000\,000$

$\iff$ $48\,000\ (x'(t))' + 240\,000\ x'(t) = 360\,000\,000$

$v(t) = x'(t)$ $\iff$ $48\,000\ v'(t) + 240\,000\ v(t) = 360\,000\,000$

$\div 48\,000$ $\iff$ $v'(t) + 5v(t) = 750$

$\iff$ $v'(t) = -5v(t) + 750$ (E')

2.b (E') est de la forme $y' = ay + b$.

. On note (H) l'équation homogène $y' = ay$, depuis le cours ses solutions sont de la forme $C.e^{-5t}$, $C \in \mathbb{R}$.

$$S_H = \{ C.e^{-5t} \mid C \in \mathbb{R} \}$$

. On cherche une solution particulière constante à (E'). Soit k cette constante. Dans (E') il vient :

$$k'(t) = -5k(t) + 750$$
$$0 = -5k(t) + 750$$
$$k(t) = \frac{750}{5} = 150, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

. Finalement, $S_{E'} = \{ v : t \longmapsto C.e^{-5t} + 150 \mid C \in \mathbb{R} \}$

2.c Dans (E'), on a la C.I. $v(0) = 0$,

donc $C.e^{-5\times 0} + 150 = 0$, i.e. $C = -150$.

La solution de $\begin{cases} (E') \\ v(0) = 0 \end{cases}$ est donc $v(t) = -150e^{-5t} + 150$.

On primitive cette solution pour obtenir le déplacement :

$$x(t) = \frac{-150}{-5} e^{-5t} + 150t + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = 30e^{-5t} + 150t + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Avec la condition initiale $x(0)=0$, il vient :

$x(0) = 30\,e^0 + 150\times 0 + K$ ⚠ $e^0 = 1.$

$0 = 30 + K$

$K = -30$

1 Donc $\underline{x(t) = 30\,e^{-5t} + 150\,t - 30.}$

3°) On a vu au 2.c que $v(t) = -150\,e^{-5t} + 150$ (composée d'exponentielle)

Donc $v'(t) = (-150)\times(-5)\,e^{-5t} = 750\,e^{-5t}$

L'exponentielle est positive, donc $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ v'(t) > 0$,

2 donc la fonction v est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-5t} = 0^+$

Par produit puis par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} v(t) = 150$ km/h

4°) $v(t) > 120$

$\Leftrightarrow -150\,e^{-5t} + 150 > 120$

$\Leftrightarrow -150\,e^{-5t} > -30$

$\Leftrightarrow e^{-5t} < 0{,}2$

2 $\Leftrightarrow -5t < \ln(0{,}2)$

$\Leftrightarrow t > \dfrac{\ln(0{,}2)}{-5}$

au par excès - erreurs à la calculatrice

On pose $t_0 = \dfrac{\ln(0{,}2)}{-5} \simeq 0{,}322$ sec.

Au temps t_0, le nombre de km parcourus est :

$x(t_0) = 30\,e^{-5\times\frac{\ln(0,2)}{-5}} + 150\,\dfrac{\ln(0{,}2)}{-5} - 30$

$= 30\times 0{,}2 + \dfrac{150\ln(0{,}2)}{-5} - 30$

$x(t_0) \simeq 24{,}2831$

Donc la vitesse de la locomotive dépassera 120 km/h au bout d'environ 24,3 km.

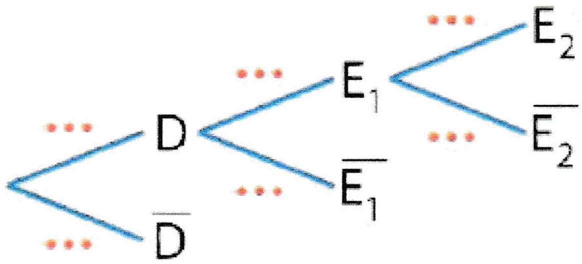
DEVOIR SURVEILLÉ N° 06

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet est composé de trois exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 10 pts)
Pour embaucher ses cadres, une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante.
Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40% des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise.
Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70% d'entre eux sont retenus.
Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25% des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat. On considère les événements :
   - D : « Le candidat est retenu sur dossier »
   - E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »
   - E_2 : « Le candidat est recruté »

   (a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



   (b) Calculer la probabilité de l'événement E_1.

   (c) On note F l'événement « Le candidat n'est pas recruté ». Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à $0,93$.

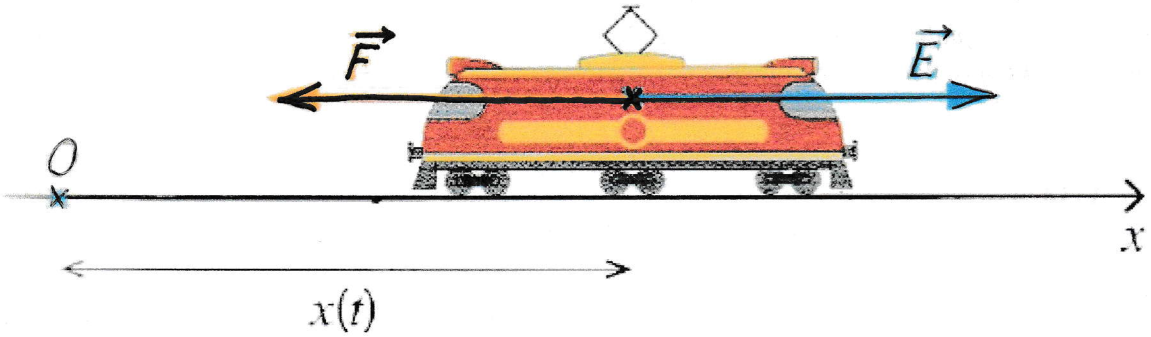
2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leurs dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.
   On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les cinq candidats.

   (a) Justifier que X suit la loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

   (b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira le résultat à10^{-3}.

3. (Répondre en utilisant votre calculatrice, aucune justification n'est demandée) Quel est le nombre minimal de dossiers que le cabinet doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

Exercice 2 (10 pts)
Une locomotive de 48 tonnes se déplace sur une voie ferrée rectiligne d'origine O. Le moteur de la locomotive génère une force d'entraînement constante $\vec{E}$ de valeur (norme du vecteur $\vec{E}$) 36 000 kN ; les forces de frottement $\vec{F}$ sont *proportionnelles à la vitesse* de la locomotive, et de sens contraire à cette vitesse. Le coefficient de proportionnalité est égal à 240 000 Newtons par km/h.



On note $x(t)$ la distance, en kilomètres, parcourue par la locomotive en fonction du temps t, en heure. A l'instant t, sa vitesse est notée $x'(t)$ et son accélération est notée $x"(t)$.
Selon les lois de Newton, $\vec{E}+\vec{F}=m\vec{a}$, où le vecteur $\vec{a}$ représente l'accélération de la locomotive et m la masse de la locomotive en kg. Si l'on considère les normes des vecteurs, on a donc $||\vec{a}|| = x"(t)$.

1. Justifier que :
   $48\ 000\ x"(t) + 240\ 000\ x'(t) = 36\ 000\ 000$

2. (a) Démontrer que le "déplacement" $y = x(t)$ est solution de l'équation différentielle
   $$(E) : 48000y" + 240000y' = 36000000$$
   ssi la vitesse $v = x'(t)$ est solution de l'équation différentielle
   $$(E') : v' = -5v + 750$$
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E').
   (c) On suppose que l'on a les conditions initiales : $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$ (c'est-à-dire $x'(0) = 0$). En déduire l'expression de $x(t)$ en fonction de t.
3. Étudier le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et déterminer la limite de $v(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
4. Au bout de combien de kilomètres la vitesse de la locomotive dépassera-t-elle $120km/h$?