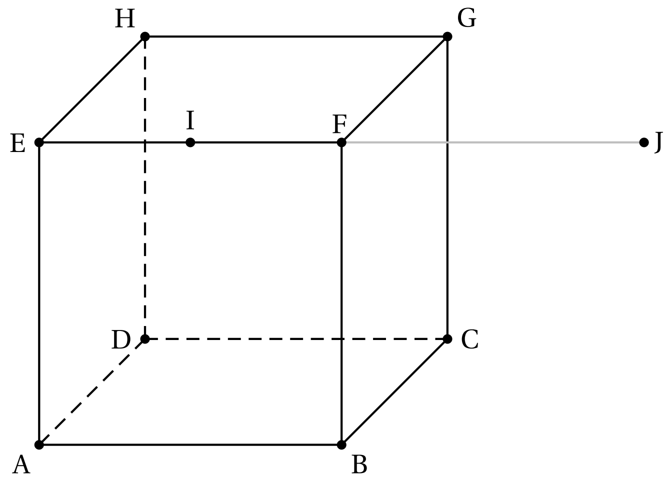
DEVOIR SURVEILLÉ N° 07

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet est composé de plusieurs exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (10 pts)

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.
   b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.
   c. Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x-y+z-2=0$.
2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   b. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{5}{6}\right)$.
   Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).
3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V=\frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times h$$

   où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.
   a. Calculer le volume de la pyramide FBGI.
   b. En déduire l'aire du triangle BGI.

Exercice 2 (10 pts)

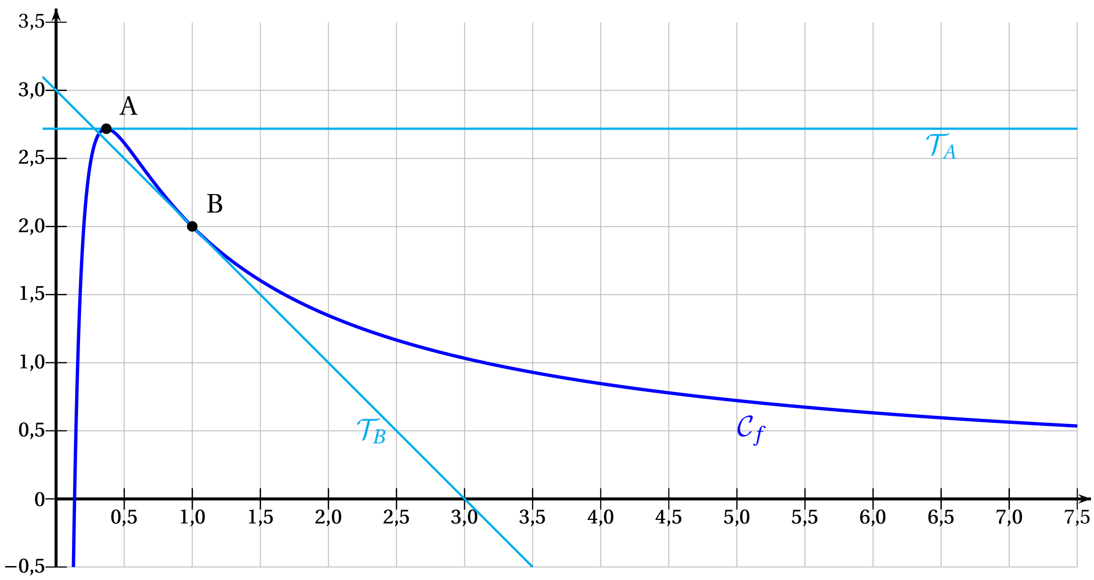
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

— la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$;

— la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,\mathrm{e}\right)$;

— la tangente $\mathcal{T}_B$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;\,2)$.

La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

Partie I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite $\mathcal{T}_B$.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f On admet que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$

$$f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel $f''(x) \geqslant 0$.