Devoir Maison Bilan #5 - PAGE A CONSERVER
NOMBRES COMPLEXES

I. Différentes écritures d'un nombre complexe - passer d'une forme à l'autre.

- forme algébrique: $z = a + ib$
- forme trigonométrique: $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$
- forme exponentielle: $z = \rho e^{i\theta}$

On passe d'une forme à l'autre comme suit:

$$\begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Forme algébrique:	Forme trigonométrique:	Forme exponentielle:
$z = a + ib$	$z = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$	$z = \rho e^{i\theta}$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pour déterminer θ, on essaie de factoriser pour exhiber

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

Sinon, solution de secours:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

II. Forme algébrique, calculs dans $\mathbb{C}$.

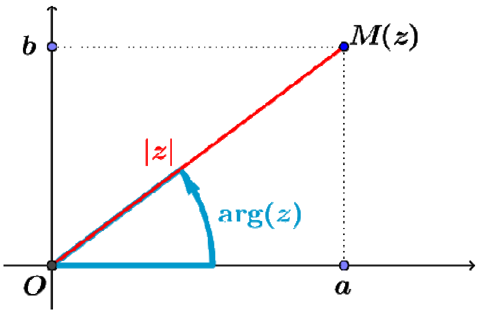
- On a par définition $i^2 = -1$
- Le conjugué de $z = a + ib$ est $\overline{z} = a - ib$

  On a: $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (le passage au conjugué est "compatible" avec les opérations usuelles)
- Quand on a un quotient de complexes sous forme algébrique, il peut être utile de multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur: $\dfrac{(2+i)}{(3+2i)} = \dfrac{(2+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{8-i}{13} = \dfrac{8}{13} - \dfrac{1}{13}i$.
- Equation du second degré avec $\Delta < 0$: écrire $\Delta = (\delta i)^2$ (par exemple $\Delta = -9 = (3i)^2$.

  L'équation a alors deux solutions complexes conjuguées: $z_1 = \dfrac{-b - \delta i}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \delta i}{2a}$.

  Le polynôme se factorise sous la forme $a(z - z_1)(z - z_2)$.

III. Formes trigonométriques et exponentielle.



Il s'agit tout simplement d'un passage des coordonnées cartésiennes au coordonnées polaires (voir cours de seconde - DM02).

- Module de z : $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

  $z\bar{z} = |z|^2$; c'est une méthode souvent utile pour calculer le module de z .

  $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $(z' \neq 0)$ (le passage au module est "compatible "avec $\times$ et $\div$, mais PAS avec $+$ ni $-$)

  Inégalité triangulaire: $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

- Argument de z : $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$; $\sin\theta = \frac{b}{\rho}$, où $\rho = |z|$.

  $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$; $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$.

  On a aussi: $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$, et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$.

- Ce petit programme peut être utile si vous cherchez la mesure principale de l'argument:

```
PROGRAM:MESPRINC
: Prompt X
: If X ≥0
: Then
: While X>π
: X-2π→X
: End
: Else
: While X≤-π
: X+2π→X
: End
: End
: Disp "π*" , X/π ► Frac
```

IV. Complexes et géométrie

- Le complexe z peut représenter ("*être l'affixe de*") un point ou un vecteur.

  Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

- Egalités de longueurs: montrer que les normes des vecteurs $\|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$ sont égales.

- Perpendicularité: on a l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$.

  Si cet argument est égal à $\pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$ (ou à $\frac{\pi}{2}[\pi]$), alors $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

- Alignement: A, B, C sont alignés ssi $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ est égal à 0 ou π [2π] (ou à 0[π]).