Devoir Maison Bilan #3 - PAGE A CONSERVER
FONCTIONS

I. Différents types de fonctions.

Type de fonction	"formule"	Définie pour:	Dérivable pour:	Attention à:
Polynôme	$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	n est le degré, et a_n le coefficient dominant. Regarder la parité.
Fraction rationnelle	$\frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes	$Q(x)\neq 0$	$Q(x)\neq 0$	S'il y a des $\sqrt{\ }$, des $\cos, \sin$ ou des $\ln, e^x$, ce n'est **PAS** une fract° rationnelle !!
Racine carrée	$\sqrt{g(x)}$, où g est une autre fonction	$g(x)\geq 0$	$g(x)>0$	Rester sur $\mathbb{R}_+$. Regarder la parité.
Valeur absolue	$\lvert g(x)\rvert$, où g est une autre fonction	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	Faire **2 cas** !!! Regarder la parité.
Trigonométrique	$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Périodicité, parité.
Exponentielle	e^x, ou $e^{g(x)}$, où g est une autre fonction	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
Logarithme	$\ln(x)$, ou $\ln(g(x))$, où g est une autre fonction	$g(x)>0$	$g(x)>0$	Rester sur $\mathbb{R}_+^*$

II. Révisions sur le second degré.

- Equation $f(x)=0$, où $f(x)=ax^2+bx+c$:
  on calcule d'abord le discriminant $\Delta=b^2-4ac$.
  - Si $\Delta<0$, pas de solutions dans $\mathbb{R}$, $S=\varnothing$ (sans accolades)
    Deux solutions dans $\mathbb{C}$, si on pose $\Delta=-\delta^2=(i\delta)^2$,
    $$S=\left\{\frac{-b-i\delta}{2a};\frac{-b+i\delta}{2a}\right\}$$
  - Si $\Delta=0$, une solution, $S=\{\underbrace{-\frac{b}{2a}}_{x_0}\}$ (le polynôme a une racine double x_0).
  - Si $\Delta>0$, deux solutions,
    $$S=\left\{\underbrace{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}_{x_1};\underbrace{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}_{x_2}\right\}$$ (le polynôme a deux racines distinctes x_1 et x_2).
- Factorisation:
  - Si $\Delta<0$, pas de factorisation.
  - Si $\Delta=0$, $f(x)=a(x-x_0)^2$
  - Si $\Delta>0$, $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$
- Signe: Si $\Delta>0$, $f(x)$ est " *du signe de* a *à l'extérieur des racines* ".
- Programme pour le calcul du discriminant et des racines sur une **TI**:

```
PROGRAM:DEGRE2
:Input " A=" ,A
:Input "B=" ,B
:Input "C=" ,C
:If A=0
:Then
:Disp "CHOISIR A≠0"
:Else
:B²-4AC→D
Disp "DELTA=" , D ▶ Frac
:If D<0
:Then
:Disp "PAS DE SOLUTION"
:Else
:If D=0
:Then
:Disp "1 SOLUTION", -B/(2A) ▶ Frac
:Else
:(- B + √(D)) / (2A)→E
:(- B - √(D)) / (2A)→F
:Disp "2 SOLUTIONS", E ▶ Frac, F ▶ Frac
:End
:End
:End
```

III. Parité, imparité, périodicité.

- f est périodique de période T, ou T-périodique, ssi $\forall x \in D_f$, $f(x+T) = f(x)$. On restreint l'étude à $]-T;T]$.
- f est paire ssi $\forall x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$. On restreint l'étude à $\mathbb{R}_+$ (symétrie axiale / Oy).
- f est impaire ssi $\forall x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$. On restreint l'étude à $\mathbb{R}_+$ (symétrie centrale / O).

IV. Limites.

- Avant de se lancer dans de gros calculs, **vérifier que l'on a bien une forme indéterminée** !!!
  Les seuls formes indéterminées sont : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$,
  et lorsque l'on travaille avec des exponentielles : 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .
- La règle de la "**limite des termes de plus haut degré**" n'est valable **que** pour des *polynômes* ou des *fractions rationnelles* (**pas** de $\cos, \sin, \sqrt{\ }, ...^x$, etc.), et uniquement pour $x \longrightarrow \pm\infty$.
- En cas de forme indéterminée quand $x \longrightarrow \pm\infty$, essayer de "*factoriser le plus gros infini*".
  En cas de forme indéterminée quand $x \longrightarrow 0$, on peut éventuellement poser $u = \dfrac{1}{x} \longrightarrow \pm\infty$ et faire pareil.
- Si on a une forme factorisée, essayer de développer - et inversement.
- Avec des e^x ou des $\ln(x)$, se ramener à l'une des limites connues du cours:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to0^+} x\ln x = 0 \quad , \quad \lim_{t\to0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

- **Asymptotes**: horizontale ssi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$ finie, verticale ssi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, avec a fini.

V. Continuité.

- **Dérivable** $\Rightarrow$ **Continue**, donc f est continue sur son ensemble de dérivabilité.
- Si on a un doute sur la continuité de f au point d'abscisse x_0, revenir à la définition: f est continue en x_0 ssi
  $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0)$ *(i.e. la limite à droite = la limite à gauche = la valeur).*
- **Théorème des valeurs intermédiaires**: **PAS DE CONTINUITE, PAS DE TVI !!!!**
  Si f est continue sur $[a;b]$, si $f(a)$ et $f(b)$ sont "de part et d'autre" de k , alors l'équation $f(x) = k$ admet *au moins une* solution dans l'intervalle $[a;b]$.
- Théorème de **la** valeur intermédiaire, dit aussi "théorème de la bijection":
  Si de plus* f est strictement monotone sur $[a;b]$, alors cette solution est unique.
  * cela veut dire que les hypothèses du TVI ci-dessus **doivent être vérifiées** !!!

VI. Dérivation.

	f	f'	Remarques:	f	f'	Remarques:
Dérivées "simples"	x^n	$n.x^{n-1}$	$\dfrac{1}{x^p} = x^{-p}$ $\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$x \neq 0$
	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{-n}{x^{n-1}}$	$x \neq 0$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
	e^x	e^x		$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$x > 0$

	$\sin x$	$\cos x$		$\cos x$	$-\sin x$	
Dérivées des fonctions composées	u^n	$n.u'.u^{n-1}$		$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u>0$
	$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$	$u>0$	e^u	$u'e^u$	
	$\sin u$	$u'\cos u$		$\cos u$	$-u'\sin u$	

- **Opérations** : $(u+v)'=u'+v'$; $(ku)'=k.u'$; $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$; $(uv)'=u'v+uv'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

  Composition: $(f\circ u)'=\left(f(u)\right)'=u'\times f'(u)$.
- **Equation de la tangente** au point d'abscisse a : $T_a \mid y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
- **Variations**: croissante ssi $f'\geq 0$, décroissante ssi $f'\leq 0$.

VII. Exponentielle et logarithme.

- **Exponentielle:** $e^{a+b}=e^a\times e^b$; $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$; $\left(e^a\right)^n=e^{n\times a}$; $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$; $\sqrt{e}=e^{1/2}$.

  L'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, positive et strictement croissante.
- **Logarithme népérien**: attention, le logarithme népérien n'est en revanche défini que sur $\mathbb{R}_+^*$. Il est strictement croissant.

  $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$; $\ln(a^n)=n\ln(a)$; $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$; $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\ln(a)$.

VIII. Primitives et intégration.

- **Primitives usuelles**:

	f	F	Remarques:	f	F	Remarques:
Primitives "simples"	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{1}{x^p}=x^{-p}$ $\sqrt{x}=x^{1/2}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$x\neq 0$
	$\cos x$	$\sin x$		$\sin x$	$-\cos x$	
	e^x	e^x		$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$x>0$
Primitives des fonctions composées	$u'.u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$		$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$	$u\neq 0$
	$u'\cos u$	$\sin u$		$u'\sin u$	$-\cos u$	
	$u'e^u$	e^u		$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u>0$

- $\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en *a*.
- **Intégrale:** $\int_a^b f(t)dt=\left[F(t)\right]_a^b=F(b)-F(a)$
- **Inversion des bornes** : $\int_a^b f(t)dt=-\int_b^a f(t)dt$
- **Relation de Chasles**:

  $\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt=\int_a^c f(t)dt$
- **Valeur moyenne** sur [a;b]: $\mu=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.
- **Ordre:** Si $f\leq g$ sur $[a;b]$, alors

  $\int_a^b f(t)dt\leq\int_a^b g(t)dt$ (sert à intégrer membre à membre dans les inégalité)
- **Positivité**: Si $f\geq 0$ sur [a;b], alors $\int_a^b f(t)dt\geq 0$
- **Aire**: penser à prendre la valeur absolue du résultat pour que l'aire soit positive. L'unité se note "u.a.", comme "unité d'aire".