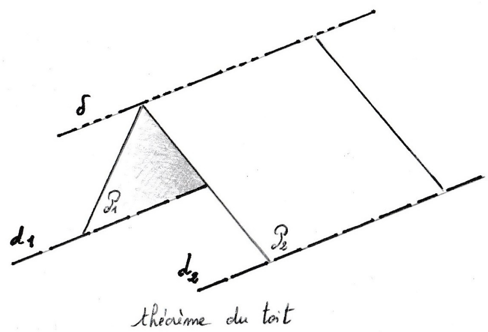
**Devoir Maison Bilan #6 - PAGE A CONSERVER**
**GEOMETRIE DANS L'ESPACE**

## I. Géométrie dans l'espace "sans les vecteurs" ( affine ).

- Volume des solides "droits" (prisme, cylindre): $V = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$
- Volume des solides "effilés" (pyramide, cône): $V = \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$
- Sphère: Volume: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ ; Aire: $A = 4\pi r^2$

**Théorème du toit**: Soient $d_1$ et $d_2$ deux droites parallèles de l'espace, avec $d_1 \subset P_1$ et $d_2 \subset P_2$. Si les plans $P_1$ et $P_2$ se coupent suivant une droite $\delta$, alors $\delta // d_1$ et $\delta // d_2$.




## II. Géométrie vectorielle dans l'espace.

Une base (ou un repère) est ***orthonormée*** / ***orthonormale*** ssi les vecteurs de cette base sont orthogonaux deux à deux, et tous de même norme (longueur).

**Composantes** / **coordonnées** d'un vecteur: $\vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$, ou $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix}$

**Norme** d'un vecteur: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

**Milieu** d'un **segment**: $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ ; $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ ; $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ .

Dans l'espace, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ssi il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ (ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ )

Droites **parallèles**: vecteurs directeurs colinéaires. Points **alignés**: $A, B$ et $C$ sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** ssi il existe $a, b$ et $c$ non tous nuls t.q. $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$ .

Le triplet de vecteurs $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ est une **base de l'espace** ssi $\left(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0\right) \Rightarrow \left(a = 0, b = 0 \text{ et } c = 0\right)$.

## III. Produit scalaire.

Soient $\vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$. Leur **produit scalaire** est: $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Le ***produit scalaire*** est une ***caractérisation de l'orthogonalité*** : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

On a aussi: $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

**Pté ROC**: Une droite est orthogonale à toutes les droites d'un plan ssi elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

**Deux plans sont perpendiculaires** ssi leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux (produit scalaire nul).

## IV. Caractérisation des droites et des plans.

| | Droite | Plan |
|---|---|---|
| Caractérisation vectorielle | La droite $(AB)$ est l'ensemble des points $M$ t.q. il existe $\lambda \neq 0$ t.q. $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ | Le plan $P$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *non colinéaires* est l'ensemble des points $M$ t.q. il existe $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ t.q. $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ |
| Equation paramétrique<br>(ce système n'est pas unique) | La droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(a;b;c)$ a pour syst. d'équ$^{os}$ paramétriques: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ | Le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ a pour système d'équations paramétriques: $\begin{cases} x = x_0 + at + a't' \\ y = y_0 + bt + b't', \quad t, t' \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct + c't' \end{cases}$ |
| Equation cartésienne | / | $ax + by + cz + d = 0$<br>$\vec{n} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ est un vecteur normal au plan. |

Equation d'une sphère de rayon R et de centre $I(a;b;c)$: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$