Devoir Maison Bilan #7 - PAGE A CONSERVER
PROBABILITES 2

I. Lois à densité autres que la loi normale.

f est une densité de probabilité ssi:

- f est positive
- f est continue (en réalité, il suffit que f soit continue "presque partout", c'est-à-dire continue sauf en un nombre fini de points)
- $\int_I f = 1$, où I est l'intervalle sur lequel la probabilité est définie.

Dans ce cas, $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f$

A. Loi uniforme

Sur l'intervalle $[a;b]$, la densité est $f(x) = \frac{1}{b-a}$, et la densité est nulle en dehors de cet intervalle.

$E(X) = \frac{a+b}{2}$

B. Loi exponentielle

Sur $\mathbb{R}_+$, la densité est $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, et la densité est nulle pour $x < 0$.

$E(T) = \frac{1}{\lambda}$

La loi exponentielle obéit à ***la loi de durée de vie sans vieillissement***: $P_{(T \geq t)}(T \geq t+h) = P(T \geq h)$

II. Loi normale.

A. Loi normale centrée réduite

Sur $\mathbb{R}$, la densité est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Les probabilités se calculent à la calculatrice. Notez ici le mode d'emploi ***pour votre modèle de calculatrice***:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Cette fonction est paire, il y a **symétrie de la courbe de Gauss**.

$E(Z) = 0$, $V(Z) = 1$. $P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$; $P(-2{,}58 \leq Z \leq 2{,}58) = 0{,}99$

Si l'on a $X \sim B(n, p)$ (loi binomiale) telle que:

- $n \geq 30$
- $np \geq 5$
- $n(1-p) \geq 5$

alors on peut appliquer le théorème de **Moivre-Laplace**: si l'on centre et l'on réduit cette loi binomiale en posant $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, alors la loi Z obtenue peut être approximée par la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.

B. Loi normale "générale"

Dans le cas général d'une loi normale de paramètres μ et σ^2, on note $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

On a $E(X) = \mu$ (axe de symétrie de la courbe).

Les probabilités se calculent à la calculatrice. Notez ici le mode d'emploi ***pour votre modèle de calculatrice***:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

On peut centrer et réduire cette loi en posant $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \simeq 0{,}68$; $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \simeq 0{,}95$; $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \simeq 0{,}997$

III. Echantillonnage, estimation.

Intervalle de confiance au seuil de 95%: n est la taille de l'échantillon, f est la fréquence (loi binomiale, autres lois discrètes):

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%: n est la taille de l'échantillon, p est la fréquence (loi normale, dans les ***conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace***):

- $n \geq 30$
- $np \geq 5$
- $n(1-p) \geq 5$

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \;;\; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$