Terminale S - TP02: Introduction à la logique – Corrigé –

La logique formelle est une branche des mathématiques (et de la philosophie), qui étudie la validité (ou la cohérence) de déductions et de propositions, sans se préoccuper du fait que ces propositions soient vraies ou non.
On étudie la forme, pas le contenu.

1. Une proposition logique et sa négation.

Une proposition est une "phrase mathématique". Toute proposition, comme "il pleut" ou "ABCD est un rectangle" peut être **vraie (noté 1) ou fausse (noté 0)**. Il n'y a pas d'autre possibilité (pas de "à moitié vrai"); cela s'appelle le principe du *tiers exclu*.
La table de vérité de la proposition P donne toutes les possibilités pour P:
C'est assez simple lorsque l'on considère une seule proposition.

P
0
1

Une proposition toujours vraie s'appelle une *tautologie*, et une proposition toujours fausse une *contradiction*.

Def.1: Négation d'une proposition.
La *négation* d'une proposition P, notée par le connecteur logique $\neg$, est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie. Autrement dit, $\neg P$ est le contraire de P.

P	$\neg P$
0	1
1	0

Exemple: Si P est la proposition: "Le triangle ABC est rectangle", alors $\neg P$ est la proposition "Le triangle ABC n'est pas rectangle".

Question 1: Ecrire la négation des propositions suivantes:

P	$\neg P$
Le nombre n est pair.	le nombre n est impair
$x \geq 0$	$x < 0$
Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$	Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 1$
Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq 2$	Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 2$

Def.2: Equivalence formelle.
Deux propositions sont dites *logiquement équivalentes* lorsqu'elles ont la même table de vérité. On note $\equiv$.

Exemple: $(\neg\neg P) \equiv P$.

2. Les principaux opérateurs logiques.

En combinant deux propositions, on peut en construire une nouvelle. Par exemple: "Il pleut et je n'ai pas de parapluie" et construit à partir de P: "il pleut' et de Q: "je n'ai pas de parapluie". Ces deux propositions sont "assemblées" pour en former une nouvelle grâce au connecteur logique "et".
Voici différentes manières de combiner deux propositions pour en faire une nouvelle, grâce à différents "connecteurs logiques".

Def.3: La conjonction: « et », symbole « $\wedge$ ».
La *conjonction* de deux propositions P et Q est la proposition « P et Q », notée $P \wedge Q$.
La proposition $P \wedge Q$ est vraie quand les deux propositions P et Q sont vraies.

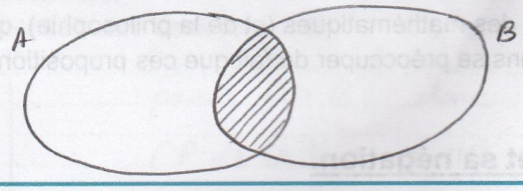
P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemple: La conjonction des propositions "ABC est isocèle" et "ABC est rectangle" est "ABC est isocèle rectangle".

Question 2: Ecrire la conjonction des couples de propositions suivantes:

P	Q	$P \wedge Q$
Le nombre n est pair.	Le nombre n est multiple de 5	le nombre n est multiple de 10
$x \in [3;12[$	$x \in [7;+\infty[$	$x \in [7;12[$
Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$	Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$	Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 3$
Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq 2$	Quel que soit x, $f(x) > 3$	$(\forall x, f(x) > 3)$ et $(\exists x : f(x) \leq 2)$ (il s'agit d'une contradiction)

Remarque: le second exemple montre qu'il y a une similitude entre le connecteur logique "et" et la notion d'intersection pour les ensembles. En effet, les éléments de $A \cap B$ sont les éléments qui sont à la fois dans A **et** dans B.



Def.4: La disjonction: « ou », symbole « $\vee$ ».
La *disjonction* de deux propositions P et Q est la proposition « P ou Q », notée $P \vee Q$
La proposition $P \vee Q$ est vraie quand l'une des deux propositions P ou Q est vraie, ou bien quand les deux sont vraies.

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

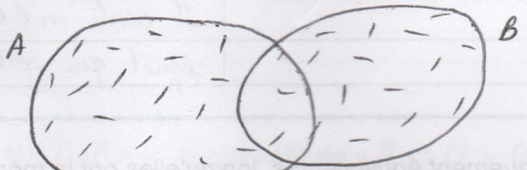
Attention: En mathématiques, contrairement au langage courant, "ou" signifie "l'un, ou l'autre, *ou les deux*".

Exemple: La disjonction des propositions "ABC est isocèle" et "ABC est rectangle" est "ABC est isocèle ou rectangle" (ABC peut donc être isocèle rectangle).

Question 3: Ecrire la disjonction des couples de propositions suivantes:

P	Q	$P \vee Q$
Le nombre n est pair.	Le nombre n est impair	$n \in \mathbb{N}$ (ou encore n pair ou impair)
$x \in [3;12[$	$x \in [7;+\infty[$	$x \in [3;+\infty[$
$x \in \mathbb{R}$ t.q. $x \geq 0$	$x \in \mathbb{R}$ t.q. $x \leq 0$	$x \in \mathbb{R}$ (ou encore $x \leq 0$ ou $x \geq 0$)
$x^2 = 9$	$x^2 = 16$	($x^2 = 9$ ou $x^2 = 16$)

Remarque: le second exemple montre qu'il y a une similitude entre le connecteur logique "ou" et la notion de réunion pour les ensembles. En effet, les éléments de $A \cup B$ sont les éléments qui sont ou bien dans A, **ou** bien dans B, ou bien dans les deux (dans $A \cap B$).



Question 4:

1°) Ecrire la table de vérité de la proposition « $\neg(P \wedge Q)$ ».

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

2°) Ecrire la table de vérité de la proposition « $\neg P \vee \neg Q$ ».

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

3°) Comparer les deux tables de vérité obtenues aux questions précédentes. Que remarquez-vous?

On obtient les mêmes tables de vérité, donc les propositions sont équivalentes : $(\neg(P \wedge Q)) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$

4°) Comparer de la même manière les tables de vérité des propositions « $\neg(P \vee Q)$ » et « $\neg P \wedge \neg Q$ ».
Ecrire ci-dessous ces tables de vérité et conclure.

P	Q	$P\vee Q$	$\neg(P\vee Q)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

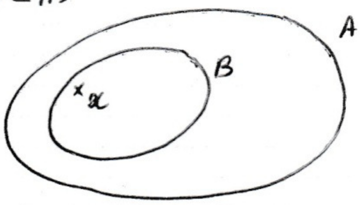
On obtient les mêmes tables de vérité, donc $(\neg(P\vee Q)) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$.
" Tout se passe comme si "on pouvait "distribuer" l'opérateur « non » $\neg$, avec $\neg\vee \equiv \wedge$ et $\neg\wedge \equiv \vee$
$\neg(P\vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ et $\neg(P\wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$.

Def.5: L'implication: « si ... alors ... », symbole « $\Rightarrow$ ».
L' *implication* est la proposition «si P, alors Q», notée $P \Rightarrow Q$.
La proposition $P \Rightarrow Q$ est toujours vraie sauf lorsque P est vraie et Q est fausse.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exemple: L' *implication* formée à partir des proposition P :« il pleut » et Q :« je prends mon parapluie » est la proposition: « Si il pleut, alors je prends mon parapluie».

<u>Remarque:</u> L'exemple $(x \in B) \Rightarrow (x \in A)$ montre qu'il y a une similitude entre le connecteur logique "$\Rightarrow$" et la notion d'inclusion pour les ensembles. En effet, si dès qu'un élément est dans B, il est automatiquement dans A, cela signifie que B est inclus dans A : $B \subset A$.



<u>Question 5</u>:
1°) Ecrire la table de vérité de la proposition « $\neg P \vee Q$ ».

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

2°) Comparer la table de vérité de « $\neg P \vee Q$ » et celle de « $P \Rightarrow Q$ ». Que remarquez-vous?
$\neg P \vee Q$ et $P \Rightarrow Q$ ont la même table de vérité et sont donc équivalentes.
$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$

3°) En déduire la négation de la proposition « $P \Rightarrow Q$ » (écrire votre réponse avec les connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$ uniquement, sans utiliser $\Rightarrow$).
$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv \neg(\neg P \vee Q) \equiv (\neg\neg P) \wedge (\neg Q) \equiv P \wedge \neg Q$
La négation de $P \Rightarrow Q$ est donc $P \wedge \neg Q$ ("P et non Q"),
on peut le vérifier en dressant sa table de vérité.

4°) Comparer de la même manière les tables de vérité des propositions « $\neg Q \Rightarrow \neg P$ » et « $P \Rightarrow Q$ ».
Ecrire ci-dessous ces tables de vérité et conclure.
La proposition $\neg Q \Rightarrow \neg P$ s'appelle la *contraposée* de la proposition $P \Rightarrow Q$.

P	Q	¬P	¬Q	¬Q⇒¬P
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

On obtient la même table de vérité que pour $P \Rightarrow Q$, donc
$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Def.6: L'équivalence: « si et seulement si », symbole « ⇔ ».
L' *équivalence* est la proposition « P si et seulement si Q », notée $P \Leftrightarrow Q$.
La proposition $P \Leftrightarrow Q$ est équivalente à ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$), c'est-à-dire ($P \Rightarrow Q$) $\wedge$ ($Q \Rightarrow P$).

Exemple: L' *équivalence* formée à partir des proposition P :« ABC est rectangle en A » et Q :« $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » est la proposition: «ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ».

Question 6:
1°) Ecrire la table de vérité de la proposition « $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ ».

P	Q	P∧Q	¬P	¬Q	¬P∧¬Q	(P∧Q)∨(¬P∧¬Q)
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1

2°) Comparer la table de vérité de « $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ » et celle de « $P \Leftrightarrow Q$ ». Que remarquez-vous?

P	Q	P⇒Q	Q⇒P	(P⇒Q)∧(Q⇒P)
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

(car $P \Leftrightarrow Q \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$)

On obtient les mêmes tables de vérité donc $(P \Leftrightarrow Q) \equiv \big((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)\big)$

Question 7: (question subsidiaire)
1°) Ecrire la phrase «*Une œuvre d'art a toujours une sens*» sous la forme « $P \Rightarrow Q$ », en précisant ce que vous choisissez comme propositions P et Q.

P: Être une oeuvre d'art
Q: Avoir un sens
} Cette phrase s'écrit bien $P \Rightarrow Q$

2°) Ecrire la phrase «*Il suffit d'avoir le choix pour être libre*» sous la forme « $P \Rightarrow Q$ », en précisant ce que vous choisissez comme propositions P et Q.

P: Avoir le choix
Q: Être libre
} Cette phrase s'écrit bien $P \Rightarrow Q$.