TD N^o 02: Ensembles

L'objet de ce TD est de revoir et d'approfondir les notions de base sur les ensembles. Ce TD utilise pour support un cours vidéo issu du site "Canal U", site de ressources pour l'enseignement supérieur. Une correction des exercices est proposée en ligne sur le site maths.langella.free.fr , dans la rubrique Lycéens/Terminales S/ Vers le supérieur.

1 Rappels sur les ensembles

Merci de visionner la vidéo suivante (vous aurez besoin d'un casque audio) :

`https://youtu.be/bPT6-g3B5wQ`

1.1 Différentes façons de définir un ensemble

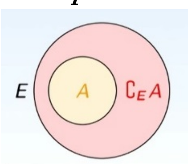
Le paradoxe de Russel :
« Dans une ville, le barbier rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. Qui rase le barbier ? »
- Si le barbier se rase lui-même, il ne peut pas faire partie de ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes, et ne peut donc pas être rasé par le barbier...
De la même manière, le paradoxe de Russel peut s'exprimer : « L'ensemble E des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même ? »
- Si on répond oui, alors, comme par définition les membres de cet ensemble n'appartiennent pas à eux-mêmes, il n'appartient pas à lui-même : contradiction.
- Si on répond non, alors il a la propriété requise pour appartenir à lui-même : contradiction à nouveau.
On a donc une contradiction dans les deux cas, ce qui rend l'existence d'un tel ensemble paradoxal.

Exemples :

- L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$
- L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$
- L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$
- L'ensemble des réels $\mathbb{R}$, par exemple 1, $\sqrt{2}$, π, ...
- L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

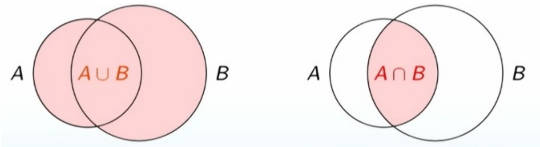
1.2 Inclusion, Union, Intersection, Complémentaire

- ***Inclusion*** $E \subset F$ ssi tout élément de E est aussi élément de F
  Autrement dit : $\forall x \in E, x \in F$
  On dit aussi :« E est un sous-ensemble de F » ou « E est une partie de F »
- ***Égalité*** $E = F$ ssi $E \subset F$ et $F \subset E$
- $\mathscr{P}(E)$***Ensemble des parties de*** E
  Exemple si $E = \{1; 2; 3\}$
  $\mathscr{P}(\{1; 2; 3\}) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}$
- ***Complémentaire*** Si $A \subset E$, $\complement_E A = \{x \in E | x \notin A\}$



Noté aussi $E \backslash A$ ou $\complement A$

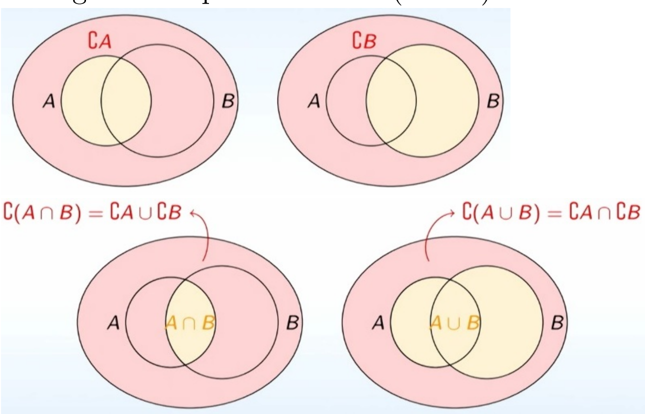
- ***Union*** $A \cup B = \{x \in E | x \in A \text{ ou } x \in B\}$



- ***Intersection*** $A \cap B = \{x \in E | x \in A \text{ et } x \in B\}$

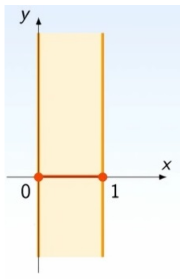
1.3 Règles de calcul

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité de $\cap$)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité de $\cup$)
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$ (distributivité de $\cap$ sur $\cup$) ([1])
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ (distributivité de $\cup$ sur $\cap$)
- $\complement(\complement A)) = A$ (le passage au complémentaire est involutif)
- $A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$
- Passage au complémentaire : $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ ([2]) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

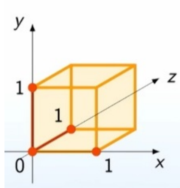


Faire des figures similaires pour visualiser chacune des propriétés ci-dessus.

1.4 Produit cartésien



- ***Produit cartésien*** $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.
- Exemples :
  1. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$
  2. $[0; 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 1, y \in \mathbb{R}\}$
  3. $[0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1] = \{(x, y, z) | 0 \leqslant x, y, z \leqslant 1\}$



1. Démontré dans la vidéo
2. Démontré dans la vidéo

2 Exercices

Attention, un dessin ne suffit pas ! Inspirez-vous des démonstrations incluses dans la vidéo, on attend le même type de démarche.

Exercice 1 En utilisant les définitions, démontrer que
$A \neq B$ si et seulement s'il existe $a \in A \backslash B$ ou $b \in B \backslash A$.

Exercice 2 Énumérer (i.e. lister tous les éléments de) $\mathscr{P}(\{1;2;3;4\})$

Exercice 3 1. Démontrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. Démontrer que $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

Exercice 4 Énumérer (i.e. lister tous les éléments de) $\{1;2;3\} \times \{1;2;3;4\}$

Exercice 5 Représenter graphiquement (ici, un dessin suffit) les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants (où $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble de "tous les couples possibles de coordonnées", et est donc représenté par le plan tout entier).

1. $(]0;1[\cup[2;3[) \times [-1;1]$
2. $(\mathbb{R}\backslash(]0;1[\cup[2;3[) \times ((\mathbb{R}\backslash\,[-1;1]) \cap [0;2])$

Exercice 6 On rappelle que la contraposée d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$. On a montré grâce aux tables de vérité qu'un implication et sa contraposée sont équivalentes : $(P \Rightarrow Q) \equiv \neg(Q \Rightarrow \neg P)$.
Démontrer en utilisant la contraposée les assertions suivantes, où E est un ensemble.

1. $\forall A, B \in \mathscr{P}(E), \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$
2. $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E), \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$