TD N° 05: Equation différentielles linéaires du 1er ordre.

L'objet de ce TD est de découvrir la notion d'équation différentielle. Ce TD utilise pour support un cours vidéo issu du site "Canal U", site de ressources pour l'enseignement supérieur. Une correction des exercices est proposée en ligne sur le site maths.langella.free.fr , dans la rubrique Lycéens/Terminales S/ Vers le supérieur.

1 Définition, premières propriétés.

Merci de visionner la vidéo suivante (vous aurez besoin d'un casque audio) :

`https://www.youtube.com/watch?v=dkjXofPNMDo`

Premier exemple : la chute libre.

Lorsqu'un corps tombe en chute libre sans frottement il n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$. Un parachute fait subir une force de frottement opposée à sa vitesse. Le poids est une force verticale dirigée vers le bas, et $P = mg$ où m est la masse et g est la constante de gravitation. La force de frottement est verticale dirigée vers le haut, et proportionnelle à la vitesse : $F = -fmv$, f est le coefficient de frottement. Ainsi le principe fondamental de la dynamique s'écrit $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$ où $\vec{a}$ est l'accélération. Cette équation sur l'axe vertical devient $mg - fmv = ma$. L'accélération étant la dérivée de la vitesse par rapport au temps on obtient :

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - kv(t) \tag{1}$$

C'est une relation entre la vitesse v et sa dérivée : il s'agit d'une *équation différentielle*. Il n'est pas évident de trouver quelle est la fonction v qui convient. Le but de chapitre est d'apprendre comment déterminer $v(t)$, Une fois que l'on aura déterminer la vitesse on saura en déduire la position $x(t)$ à tout instant.

Définitions.

Une équation différentielle est une équation : dont l'inconnue est une fonction (généralement notée $y(x)$ ou simplement y) ; dans laquelle apparaissent certaines des dérivées de la fonction (dérivée première y', ou dérivées d'ordre supérieur y'', $y^{(3)}, ...$).

Définition : Une *équation différentielle* d'ordre n est une équation de la forme

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{E}$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables. Une *solution* d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui est
— n fois dérivable
— et qui vérifie l'équation (E).

Remarque : La notion d'intervalle dans la résolution d'une équation différentielle est fondamentale. Si on change d'intervalle, on peut très bien obtenir d'autres solutions. Par exemple, si on se place sur l'intervalle $I_1 =]0, +\infty[$, l'équation différentielle $y' = 1/x$ a pour solutions les fonctions $y(x) = \ln(x) + k$. Alors que sur l'intervalle $I_2 =]-\infty, 0[$, les solutions sont les fonctions $y(x) = \ln(-x) + k$

(k est une constante).
Si aucune précision n'est donnée sur l'intervalle I, on considérera qu'il s'agit de $I = \mathbb{R}$.

Faire ici l'exercice 1.

Équations à variables séparées.

Voici un type d'équation différentielle, dites à variables séparées, qui se résout par intégration.

Définition : Une équation différentielle *à variables séparées* est une équation du type : $y' = g(x)/f(y)$, ou, ce qui revient au même, $y'f(y) = g(x)$.

Une telle équation se résout par calcul de primitives.
Si $G(x)$ est une primitive de $g(x)$, alors par définition $G'(x) = g(x)$.
Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors $F'(x) = f(x)$, et
mais surtout par dérivation de la composée $[(f \circ g)' = f' \circ g \times g']$, il vient :
$\big(F(y(x))\big)' = y'(x)F'(y(x))$, qui vaut donc $y'f(y)$.
Ainsi l'équation différentielle $y'f(y) = g(x)$ se réécrit $\big(F(y(x))\big)' = G'(x)$, ce qui équivaut à une égalité de fonctions : $F(y(x)) = G(x) + c$.
En effet les deux dérivées étant égales, les fonctions sont égales à une constante près.

Exemple :

$$x^2y' = e^{-y}$$

On commence par "séparer" les variables x d'un côté et y de l'autre :
$y'e^y = \frac{1}{x^2}$ (en supposant $x \neq 0$).
On intègre des deux côtés :

$$e^y = -\frac{1}{x} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Ce qui permet d'obtenir y (en supposant $-\frac{1}{x} + c > 0$) :

$$y(x) = \ln\left(-\frac{1}{x} + c\right)$$

On a trouvé les solutions, mais il faut terminer la résolution en déterminant l'intervalle sur lequel cette solution est valide :
Il faut en effet que x soit non nul, et que $-\frac{1}{x} + c > 0$.
Cet intervalle dépend de la constante c :
on trouve que si $c < 0$, $I =]\frac{1}{c}, 0[$;
si $c = 0$, $I =]-\infty, 0[$;
enfin si $c > 0$, $I =]\frac{1}{c}, +\infty[$.

Faire ici l'exercice 2.

Vocabulaire.

Une équation différentielle d'ordre n est *linéaire* si elle est de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Le terme linéaire signifie qu'il n'y a pas d'exposant pour les termes $y, y', y'', ...$
Une équation différentielle linéaire est *homogène*, ou *sans second membre*, si la fonction g ci-dessus est

la fonction nulle :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = 0$$

Une équation différentielle linéaire est *à coefficients constants* si

$$a_0y + a_1y' + \cdots + a_ny^{(n)} = g(x)$$

où les a_i sont des constantes réelles (et plus des fonctions) et g reste une fonction continue.

Linéarité.

Proposition :
Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle linéaire *homogène*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \qquad (E_0)$$

alors, quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de cette équation.

Méthode de résolution.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire *avec* second membre cette fois

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = g(x) \qquad (E)$$

on décompose souvent la résolution en deux étapes :
(1) on cherche d'abord une solution particulière y_0 de cette équation,
(2) ensuite on trouve l'ensemble de toutes les solutions
y de l'équation *homogène* associée, c-à-d la même équation mais avec un second membre nul .
On note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble de ces solutions.
Ces deux étapes permettent de trouver toutes les solutions de (E) :
En effet on a le **principe de superposition** :
L'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de (E) est formé des

$$y_0 + y \quad \text{avec} \quad y \in \mathcal{S}_h$$

Autrement dit, on trouve toutes les solutions en ajoutant une solution particulière de (E) aux solutions de l'équation homogène (E_0).
C'est une conséquence immédiate du caractère linéaire des équations.

Faire ici l'exercice 3.

Exercices.

Exercice 1 Trouver une fonction $y(x)$ qui vérifie chacune des équations suivantes.
Par exemple : quelle fonction $y(x)$ a pour dérivée $sin(x)$? Une solution est $y(x) = -\cos(x)$.

1. $y' = \sin x$
2. $y' = 1 + e^x$
3. $y' = y$
4. $y' = 3y$

5. $y'' = \cos x$
6. $y'' = y$

Exercice 2 Trouver une fonction $y(x)$ qui vérifie chacune des équations suivantes.

1. Chercher une solution "simple" de l'eq. df. $y' = 2y$.
2. Chercher une solution "simple" de l'eq. df. $y'' = -y$.
3. $y'' + \cos 2x = 0$.
4. $xy' = y$.
5. Eq. df. à variables séparées : $y'y^2 = x$
6. Eq. df. à variables séparées : $y' = y \ln x$ (vérifier au préalable qu'une primitive de ln est $x \ln x - x$)
7. Eq. df. à variables séparées : $y' = \frac{1}{y^n}$

Exercice 3 Soit l'équation $y' = y(1-y)$. Montrer que si y est une solution non nulle de cette équation, alors $z = 2y$ n'est pas solution.
Que peut-on en conclure ?

Solutions.

Ex.1 :

1. $y = -\cos x + k,\ k \in \mathbb{R}$
2. $y = x + e^x + k,\ k \in \mathbb{R}$
3. $y = ke^x,\ k \in \mathbb{R}$
4. $y = ke^{3x},\ k \in \mathbb{R}$
5. $y = -\cos x + ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$
6. $y = ae^x + be^{-x},\ a, b \in \mathbb{R}$

Ex.2 :

1. $y = e^{2x}$
2. $y = \cos x$ ou $y = \sin x$
3. $y'' = -\cos 2x \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow y = \frac{1}{4}\cos 2x$
4. $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$, i.e. $(\ln y)' = (\ln x)'$, une solution est $y = x$
5. $y'y^2 = x \Rightarrow (\frac{1}{3}y^3)' = (\frac{1}{2}x^2)'$, dont $y^3 = \frac{3}{2}x^2$, i.e. $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2}$ est une solution.
6. $y' = y \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x \Rightarrow (\ln y)' = (x \ln x - x)'$, dont $\ln y = x \ln x - x$, i.e. $y = e^{x \ln x - x}$ est une solution.
7. $y' = \frac{1}{y^n} \Rightarrow y' \times y^n = 1 \Rightarrow (\frac{1}{n+1}y^{n+1})' = 1$, dont $\frac{1}{n+1}y^{n+1} = x$, i.e. $y^{n+1} = (n+1)x$, i.e. $y = \sqrt[n+1]{(n+1)x}$ est une solution.

Ex.3 :
Soit y une solution non nulle de l'équation $y' = y(1-y)$ (E). On pose $z = 2y$, il vient :
$z' = 2y'$ d'une part,
et $z(1-z) = 2y(1-2y)$ d'autre part.
Or l'égalité $z' = z(1-z)$ serait équivalente à :
$2y' = 2y(1-2y)$, où $2y' = 2 \times y(1-y)$ car y est solution de (E), d'où :
$2y(1-y) = 2y(1-2y)$
$1-y = 1-2y$ (car y non nulle)
$-y = -2y$
$1-2$, contradiction.
Donc $z = 2y$ n'est pas solution de (E), ce qui contredit le principe de linéarité, donc (E) n'admet pas de solution.
N.B. :On a fait une démonstration par l'absurde.

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre.

La suite, pour les "plus rapides" :
Merci de visionner la vidéo suivante (vous aurez besoin d'un casque audio) :

`https://www.youtube.com/watch?v=6SfAvnaFhFM`

Définition.

Définition :
Une équation différentielle *linéaire du premier ordre* est une équation du type :

$$y' = a(x)y + b(x) \qquad (E)$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$

Équations du type $y' = ay$.

Théorème :
Soit a un réel. Soit l'équation différentielle :

$$y' = ay \qquad (E)$$

Les solutions de (E), sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = ke^{ax}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Exemple :
$3y' - 5y = 0 \iff y' = \frac{5}{3}y$.
Solutions : $y(x) = ke^{\frac{5}{3}x}$, où $k \in \mathbb{R}$

Théorème :
Les solutions de $y' = ay$ sont les $y(x) = ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$

Équations du type $y' = a(x)y$.

Théorème :
Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a.
Soit l'équation différentielle :

$$y' = a(x)y \qquad (E)$$

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions y définies par : $y(x) = ke^{A(x)}$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Théorème :
Les solutions de $y' = a(x)y$ sont les $y(x) = ke^{A(x)}$ où $k \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de a.

Exemple :

$$x^2y' = y$$

— Sur $I_+ =]0, +\infty[$ ou $I_- =]-\infty, 0[$
— L'équation devient $y' = \frac{1}{x^2}y$ (ou encore $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2}$)
— Ici $a(x) = \frac{1}{x^2}$ dont une primitive est $A(x) = -\frac{1}{x}$
— Les solutions sont $y(x) = ke^{-\frac{1}{x}}$, où $k \in \mathbb{R}$

Équations du type $y' = a(x)y + b(x)$.

Équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre :

$$y' = a(x)y + b(x) \qquad (E)$$

où $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues

L'équation homogène associée est :

$$y' = a(x)y \qquad (E_0)$$

Proposition :
Si y_0 est une solution de (E), alors les solutions de (E) sont les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ définies par :

$$y(x) = y_0(x) + ke^{A(x)} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

où $x \mapsto A(x)$ est une primitive de $x \mapsto a(x)$

Solution évidente :

— L'équation différentielle $y' = 2xy + 4x$
— Solution particulière : $y_0(x) = -2$
— Solutions : $y(x) = -2 + ke^{x^2}$, où $k \in \mathbb{R}$

Méthode dite de la "Variation de la constante" :

— (E) $y' = a(x)y + b(x)$
— La solution générale de (E_0) $y' = a(x)y$, est donnée par $y(x) = ke^{A(x)}$, avec $k \in \mathbb{R}$
— Chercher une solution particulière sous la forme $y_0(x) = k(x)e^{A(x)}$
— Puisque $A' = a$, on a : $y_0'(x) = a(x)k(x)e^{A(x)} + k'(x)e^{A(x)} = a(x)y_0(x) + k'(x)e^{A(x)}$

— $y_0'(x) - a(x)y_0(x) = k'(x)e^{A(x)}$

— Donc y_0 est une solution de (E) si et seulement si $$\begin{aligned} k'(x)e^{A(x)} = b(x) &\iff k'(x) = b(x)e^{-A(x)} \\ &\iff k(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx \end{aligned}$$

— Ce qui donne une solution particulière $y_0(x) = \left(\int b(x)e^{-A(x)}dx\right) e^{A(x)}$ de (E) sur I

— La solution générale de (E) est donnée par $y(x) = y_0(x) + ke^{A(x)}$, $k \in \mathbb{R}$

Exemple :

Résoudre $y' + y = e^x + 1 \quad (E)$

— $y' = -y$ (E_0), solutions : $y(x) = ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$

— Recherche d'une solution particulière de (E) sous la forme $y_0(x) = k(x)e^{-x}$

— On doit trouver $k(x)$ afin que y_0 vérifie $y' + y = e^x + 1$

— $$\begin{aligned} & y_0' + y_0 = e^x + 1 \\ \iff & (k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}) + k(x)e^{-x} = e^x + 1 \\ \iff & k'(x)e^{-x} = e^x + 1 \\ \iff & k'(x) = e^{2x} + e^x \\ \iff & k(x) = \tfrac{1}{2}e^{2x} + e^x + c \end{aligned}$$

— $y_0(x) = k(x)e^{-x} = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + e^x\right)e^{-x} = \frac{1}{2}e^x + 1$

— Solutions générales de (E) : $y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$

Exercices.

Les exercices, des indications, ainsi que les corrigés (dont certains sont en vidéo) sont disponibles à cette adresse :

`http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00165.pdf`